目 录

第一章　集与集族

§1　集及其运算

在一般实变函数论书中，对于集及其运算都作过详细的介绍，本节中我们仅作简略的复习，以使读者了解本书所用的符号。

在本书中，我们用大写字母A，B，C，…等表示集，用小写字母$a,b,c\cdots$等表示它们的元素。记号$a\in A$表示元素a属于集A，而记号$a\notin A$表示元素a不属于集A。

设E与F为两个给定集，若E的每一元素都是F的元素，则称集E是集F的子集，或称集F包含集E，并记作

$$E\subset F \quad 或 \quad F\supset E.$$

若不特别声明，今后我们所讨论的集均为某给定集X的子集。

不包含任何元素的集，称为空集，恒用ϕ表示。显然对每一集E，恒有

$$\phi\subset E\subset X.$$

两集E和F，若满足

$$E\subset F \quad 和 \quad F\subset E$$

则称E与F相等，记为$E=F$。

设E与F是任意两集，由至少属于E，F两集之一的一切

元素所组成的集叫做E与F的并集，并记作$E\cup F$。

类似地可定义任意多个集的并集：设E_t，$t\in T$，是任意一族集，其中T是不空指标集，那么由至少属于一个$E_t(t\in T)$，的一切元素所组成的集，称为E_t，$t\in T$，的并集，并记作$\bigcup\limits_{t\in T}E_t$。特别地$n$个集$E_1,E_2\cdots E_n$的并集记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，可列个集$E_i,i=1,2,\cdots$的并集记作$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$。

由同时属于集E及集F的一切元素所组成的集，称为E与F的交集，记作$E\cap F$。类似地可得$\bigcap\limits_{t\in T}E_t$的意义：由同时属于每一个$E_t(t\in T)$的一切元素所组成的集。

如果两个集E和F无公共元素，即

$$E\cap F=\phi,$$

则称E与F互不相交。若族集$\{E_t\}$，$t\in T$，中的任意两个集互不相交，则称$\{E_t\}$，$t\in T$两两不相交。显然有

$$E\cup\phi=E;\quad E\cap\phi=\phi.$$

若$E\subset F$，则

$$E\cup F=F;\quad E\cap F=E,$$

特别地

$$E\cup E=E;\quad E\cap E=E.$$

容易证明集的并与交满足下面的运算规律。

交换律：$E\cup F=F\cup E$；$E\cap F=F\cap E$。

结合律：$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$；

$$(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G).$$

分配律：$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$；

$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$。

设E和F是任意两集，由一切属于E而不属于F的元素所组成的集叫做E与F的差集，并记作$E\setminus F$。容易证明集的并、交及差运算满足下述等式

$E\setminus(F\cup G)=(E\setminus F)\cap(E\setminus G)$；

$E\setminus(F\cap G)=(E\setminus F)\cup(E\setminus G)$。

我们称集$X\setminus E$为集E的余集并用E'表之。关于余集运算显然有下面这些等式

$E\cap E'=\phi$；　$E\cup E'=X$；

$\phi'=X$；$X'=\phi$；$(E')'=E$。

若$E\supset F$则

$E'\subset F'$。

设E_t，$t\in T$，是任一集族，则

$$\left(\bigcup_{t\in T}E_t\right)'=\bigcap_{t\in T}E_t'，$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}E_t\right)'=\bigcup_{t\in T}E_t'，$$

上述两等式称为De Morgan公式。从它们可以看出集之并与交之间的对偶关系。

设E和F是任意两集，集

$(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$

称E和F的对称差，并用$E\varDelta F$表之。由定义可看出当$E\supset F$时，则有

$E\varDelta F=E\setminus F$。

当$E\cap F=\phi$时，则

$E\varDelta F=E\cup F$。

集的对称差运算显然满足交换律，即

$$E\Delta F=F\Delta E.$$

现证明对称差运算也满足结合律。

定理1.1 设E,F及G是给定的集，那末有

$$(E\Delta F)\Delta G=E\Delta(F\Delta G).$$

证明 设$x\in(E\Delta F)\Delta G$，那末x属于且只属于下列两集之一：

$$(E\Delta F)\backslash G,\quad G\backslash(E\Delta F),$$

这时x只能仅属于E,F,G中之一或x属于E,F,G三个集之交集。同理，当$x\in E\Delta(F\Delta G)$时亦有同样的情况。证完。

最后我们说明两个今后常用的记号。设P是与X的元素x有关的命题，我们用符号

$$\{x;\ P\}$$

表示X中使命题P成立的那些元素组成的集。

例如X为实数轴，$\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$表示实数轴上的闭区间$[0,1]$。

又如X为二维实数空间，集

$$\{(x,y);\ x,y\text{为实数且}x^2+y^2=1\}$$

为平面上以原点为中心的单位圆周。

设P_1,P_2是两个命题，规定记号$P_1\Rightarrow P_2$的意义为：若命题P_1成立，则P_2亦成立。若$P_1\Rightarrow P_2$及$P_2\Rightarrow P_1$同时成立，那么我们称命题P_1，P_2是等价的，记作$P_1\Leftrightarrow P_2$。

§2 集的极限

设$E_1,E_2,\cdots,E_n\cdots$是X的子集组成的序列*) 我们分别定义

---

*) 今后集序列$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$将简记为$\{E_n\}$.

$$\overline{\lim_{n}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k ,$$

$$\underline{\lim_{n}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

为 $\{E_n\}$ 的上极限和下极限。若

$$\overline{\lim_{n}} E_n = \underline{\lim_{n}} E_n$$

则称 $\{E_n\}$ 的极限存在且以 $\lim\limits_{n} E_n$ 表之，此时按定义有

$$\lim_{n} E_n = \overline{\lim_{n}} E_n = \underline{\lim_{n}} E_n .$$

我们用记号

$$\{x: x \in E_n, i.o.\}$$

表示 X 中属于无穷个 E_n 的元素 x 所组成的集。而用记号

$$\{x: x \in E_n, a.a.\}$$

表示 X 中只能不属于有限个 E_n 的元素 x 所组成的集。

定理1.2 对任意集序列 $\{E_n\}$ 恒有

$$\overline{\lim_{n}} E_n = \{x: x \in E_n, i.o\} , \tag{1.1}$$

$$\underline{\lim_{n}} E_n = \{x: x \in E_n, a.a.\} . \tag{1.2}$$

证明 我们仅证明(1.1)式，(1.2)式可类似地证明。设 $x \in \overline{\lim\limits_{n}} E_n$，那么由上极限的定义，对每一 n，必有自然数 k_n，使 $x \in E_{k_n}$ 故

$$x \in \{x: x \in E_n\, i.o.\} .$$

反之若x属于(1.1)式右边，则对每一$n(n=1,2,\cdots)$，均存在$k\geq n$，使$x\in E_k$，从而$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$，由上极限的定义，我们有$x\in\overline{\lim_n}E_n$。定理证完。

推论 1 $\underline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}E_n$。

推论 2 改变集序列$\{E_n\}$的有限项不影响此集序列的上、下极限。

若集序列$\{E_n\}$满足$E_1\supset E_2\supset\cdots$我们将记为$E_n\downarrow$，若满足$E_1\subset E_2\subset\cdots$则记为$E_n\uparrow$。

定理1.3 设$\{E_n\}$为集序列，

1)若$E_n\downarrow$，则$\lim_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n,$$

2)若$E_n\uparrow$，则$\lim_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

证明 由定理1.2立即推得。

定理1.4 设$\{E_n\}$为任一集序列，F是X的任一子集，则

1) $$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\overline{\lim_n}E_n,$$

$$\underline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\underline{\lim_n}E_n,$$

2) $\overline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\overline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\underline{\lim_n}E_n$,

3) $\overline{\lim_n}(F\setminus E_n)=F\setminus\underline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\setminus E_n)=F\setminus\overline{\lim_n}E_n$,

4) $\overline{\lim_n}(E_n\setminus F)=\overline{\lim_n}E_n\setminus F$,

$\underline{\lim_n}(E_n\setminus F)=\underline{\lim_n}E_n\setminus F$.

证明 我们仅证明1),3),4)的第一式，其余等式可以类似证明。

先证1)的第一式.设$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$，则$x$属于无穷个$F\cup E_n$,若$x\in F$,那么$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$,于是

$$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)\subset F\cup\overline{\lim_n}E_n\ ; \qquad (1.3)$$

若$x\notin F$，则x属于无穷个E_n，因而$x\in\overline{\lim_n}E_n$，这样(1.3)式仍成立。

另一方面,若$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$,则当$x\in F$时，便有$x$属于所有$F\cup E_n$,因而$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$;如果$x\in\overline{\lim_n}E_n$,则由

(1.2) $\overline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$

知，$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n,)$这样便得

$$F\cup\overline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}(F\cup E_n). \tag{1.4}$$

由(1.3)和(1.4)式得

$$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\overline{\lim_n}E_n.$$

这便证明了1)的第一式。

往证3)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)$，则$x$属于无穷个$F\backslash E_n$，从而$x\in F$且$x$属于有限个$E_n$，也即$x\in F\backslash\underline{\lim_n}E_n$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)\subset F\backslash\underline{\lim_n}E_n. \tag{1.5}$$

反之设$x\in F\backslash\underline{\lim_n}E_n$，那么$x\in F$且$x$属于有限个$E_n$，因而$x\in\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)\supset F\backslash\underline{\lim_n}E_n. \tag{1.6}$$

由(1.5)和(1.6)即得3)的第一式。

往证4)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(E_n\backslash F)$，那么$x$属于无穷个$E_n\backslash F$，从而$x$属于无穷个$E_n$且不属于$F$，也即$x\in\overline{\lim_n}E_n\backslash F$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(E_n\backslash F)\subset\overline{\lim_n}E_n\backslash F. \tag{1.7}$$

反之设$x\in\overline{\lim_n}E_n\setminus F$，则$x$属于无穷个$E_n$且不属于$F$，故$x\in\overline{\lim_n}(E_n\setminus F)$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(E_n\setminus F)\supset\overline{\lim_n}E_n\setminus F\ . \tag{1.8}$$

由(1.7)和(1.8)两式即得4)的第一式。

推论 在定理的条件下，若更设$\lim\limits_n E_n$存在，则我们有

1) $\lim\limits_n(F\cup E_n)=F\cup\lim\limits_n E_n$，

2) $\lim\limits_n(F\cap E_n)=F\cap\lim\limits_n E_n$，

3) $\lim\limits_n(F\setminus E_n)=F\setminus\lim\limits_n E_n$，

4) $\lim\limits_n(E_n\setminus F)=\lim\limits_n E_n\setminus F$.

§3 集族及几种常用的集族

今后，我们将常常考虑某固定集X和以X的子集为元素的集，为明确起见，我们把以X的子集为元素的集，称为X上的集族，在不会混乱的场合下，将简称为集族。本书中集族将用粗体字母**A**，**B**…来表示。因集族中的元素是集，所以今后术语"集族**A**中的元素"和"集族**A**中的集"将表示同一意义。因集族是一种特殊的集，故关于集的记号和术语，可以同样地用之于集族。例如E是X的一个子集，**E**为X上的集族，则记号

$$E\in \mathbf{E}$$

表示集E属于集族$\mathbf{E}$，或者说E是$\mathbf{E}$中的一个元素。

设$\mathbf{E}$和$\mathbf{F}$是X上任意两个集族，则记号

$$\mathbf{E}\subset \mathbf{F}$$

表示$\mathbf{E}$中每一集都属于$\mathbf{F}$。

又如T是不空指标集，对于每一$t\in T$，$\mathbf{F}_t$是X上的集族，则符号$\bigcap\limits_{t\in T}\mathbf{F}_t$表示集族$\mathbf{F}_t$，$t\in T$，的交即

$$\bigcap_{t\in T}\mathbf{F}_t=\{E: E\in \mathbf{F}_t,\ \text{对一切}t\in T\}$$

类似地可以理解集族的并，两集族的差等概念。

设$\mathbf{E}$是一集族且满足条件："若$E\in \mathbf{E}$，$F\in \mathbf{E}$，则$E\cap F\in \mathbf{E}$"我们将称$\mathbf{E}$对交运算封闭。

又如$\mathbf{E}$满足条件："若$E_n\in \mathbf{E}$，$n=1,2,\cdots$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in \mathbf{E}$"则称$\mathbf{E}$对可列并运算封闭"。

下面我们介绍几种常用的集族。

设$\mathbf{P}$为一集族，且满足下列三个条件：

1） $\phi\in \mathbf{P}$，

2） 若$A, B\in \mathbf{P}$，则$A\cap B\in \mathbf{P}$，

3） 若$A, B\in \mathbf{P}$且$A\supset B$则

$$A\backslash B=\bigcup_{k=1}^{n}C_k$$

其中每一个C_k均属于$\mathbf{P}$且$C_i\cap C_j=\phi(i\neq j)$，则称$\mathbf{P}$为半环。

显然若$\mathbf{P}$为半环，那么$\mathbf{P}$中任二元素A，B之差$A\backslash B$必能表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交的集之并。

例1 记全体实数所成的集为R，a，$b\in R$且$a\leq b$，那么称

们把集

$$\{ x:\ a \leq x < b \}$$

称为R中的左闭右开区间，简称半开闭区间，并记作$[a,b)$。R中全体半开区间构成一个半环。

例2 设R^n为n维实数空间(即n维欧儿里得空间)，又设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为R^n中两元素且$a_i \leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,n$。那末R^n中满足下列关系

$$a_i \leqslant x_i < b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

的元素$x=(x_1,x_2\cdots,x_n)$所组成的集称为R^n中的半开闭区间。R^n中全体半开闭区间构成一个半环。

例3 设X为任意集，用**B**(X)表示X中全体子集组成的集族，则**B**(X)为半环。只含ϕ集的集族$\{\phi\}$亦是一个半环。

例4 设X为任意集，X中全体单点集连同ϕ集构成一个半环。

设**R**为不空集族，且满足下述条件：若E，F$\in$**R**，则E$\cup$F$\in$R，E\F$\in$**R**，那么我们称**R**为环．换句话说，如果一个非空集族对于并及差两种运算是封闭的，那么它就是一个环。

例3中的集族也是环。

例5 设X是无穷集，则由X中一切有限子集组成的集族是环。

容易证明，凡环必是半环，反之半环不一定是环。上面例1，例2及例4中的集族均是半环，但它们都不是环。

定理1.5 设R为不空集族，则下列1) 2) 3)都是使R为环的充要条件：

1) 若$E,F\in$**R**，则$E\cap F\in$**R**，$E\Delta F\in$**R**。

2）若$E, F\in R$，则$E\cup F\in \mathbf{R}$，$E\Delta F\in R$。

3）若$E, F\in \mathbf{R}$，则$E\cap F\in \mathbf{R}$，

若$E, F\in \mathbf{R}$且$E\cap F=\phi$，则$E\cup F\in \mathbf{R}$，

若$E, F\in \mathbf{R}$且$E\supset F$，则$E\setminus F\in \mathbf{R}$。

证明　只须证明蕴涵关系：环⇒1）⇒2）⇒3）⇒环。

环⇒1）从$E\Delta F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$及$E\cap F=(E\cup F)\setminus(E\Delta F)$即得。

1)⇒2）从$E\cup F=(E\cap F)\Delta(E\Delta F)$即得。

2)⇒3）从$E\cap F=(E\cup F)\Delta(E\Delta F)$及当$E\supset F$时，$E\setminus F=E\Delta F$即得。

3)⇒环从$E\setminus F=E\setminus E\cap F$及$E\cup F=E\cup(F\setminus E)$即得。

定理证完。

推论　若$\mathbf{R}$为环，则$\phi\in\mathbf{R}$且$\mathbf{R}$对有限个集之并，交及两集之差，对称差运算封闭。

证明　因$\mathbf{R}$不空，设$E\in\mathbf{R}$，那末

$\phi=E\setminus E\in\mathbf{R}$。

其余的结论由定理1.5直接推得。证完。

含X的环称为代数。由定理1.5的推论及

$$E'=X\setminus E$$

可知：代数对于有限个集之并及交，两集之差及对称差，余集等运算是封闭的。

显然例3中的集族$\mathbf{B}(X)$是代数。

例6　设X是无穷集，X中全体有限子集及余集是有限集的集所组成的集族是一个代数。

显然代数是环，反之环未必是代数。而且若$\mathbf{R}$是环，那么由X和$\mathbf{R}$中的集组成的集族也未必是代数。事实上例5中的集族是环但非代数，而且该集族增添元素X后所得的集族也

不是一个代数，因为它对余运算不封闭。

定理1.6 设$\mathbf{A}$为不空集族，则下列命题等价：

1） $\mathbf{A}$为含X的环。

2） $\mathbf{A}$对并及余运算封闭，即若$E,F\in\mathbf{A}$，则$E\cup F\in\mathbf{A}$，$E'\in\mathbf{A}$。

3） $\mathbf{A}$对交及余运算封闭，即若$E,F\in\mathbf{A}$，则$E\cap F\in\mathbf{A}$，$E'\in\mathbf{A}$。

证明 我们只须证明蕴涵关系：1)⇒2)⇒3)⇒1)。

1)⇒2)从 $E'=X\setminus E$即得。

2)⇒3)从 $E\cap F=(E'\cup F')'$即得。

3)⇒1)从

$$E\setminus F=E\cap F',$$

$$E\cup F=(E'\cap F')',$$

$$X=E\cup E'$$

即得。定理证完。

设$\mathbf{S}$为不空集族，且满足下列两条件：

1)对余运算封闭，即若$E\in\mathbf{S}$，则$E'\in\mathbf{S}$，

2)对可列并运算封闭，即若$E_n\in\mathbf{S}$，$n=1,2,\cdots$，

则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathbf{S}$ ，

那么称$\mathbf{S}$为σ代数。若$\mathbf{S}$为σ代数，那么从

$$E\cup F=E\cup F\cup F\cup\cdots$$

及

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n'\right)'$$

知，$\mathbf{S}$亦为代数且对可列交运算封闭。因此σ代数对余，差，对称差，可列并，可列交及上、下极限运算是封闭的。

例7 设X为任意集，由X及ϕ集组成的集族和X的一切子集所组成的集族$\mathbf{B}(X)$均为σ代数。

例8 设X为任意集，由X中一切可列子集(包括有限子集)及余集为可列集的集所组成的集族为σ代数。

前面我们已指出：σ代数必是代数，反之由例6可见，代数未必为σ代数。一个代数究竟要加上什么条件后才能成为σ代数呢？下述定理回答了这个问题。

定理1.7 集族$\mathbf{S}$为σ代数的充要条件是：

1) $\mathbf{S}$为代数，

2) $\mathbf{S}$对两两不相交可列并运算封闭，即若$E_i \in \mathbf{S}$，$i=1, 2, \cdots$，$E_i \cap E_j = \phi$，$i \neq j$，则有$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$。

证明 必要性显然。往证充分性。因$\mathbf{S}$为代数，故$\mathbf{S}$对余运算封闭。其次，我们证明$\mathbf{S}$对可列并运算封闭。设$E_i \in \mathbf{S}$，$i=1,2,\cdots$令

$$E_1^* = E_1,\ E_2^* = E_2 \setminus E_1,\ E_3^* = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2),\ \cdots$$

则$E_i^* \cap E_j^* = \phi$，$i \neq j$且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^*$$

因$\mathbf{S}$为代数，故$E_i^* \in \mathbf{S}$，$i=1,2,\cdots$，再由条件2)及上式知

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$，这便证明了$\mathbf{S}$是$\sigma$代数。证完。

为便于记忆，我们将前面介绍的常用集族的等价定义及其运算的特性列表如下：

集族类别	等价定义	对运算的特性
半环	对交封闭，差为有限不相交并	
环	对“∪”“\”封闭 对“∪”“Δ”封闭 对“∩”“Δ”封闭 对“∩”，不相交并，包含差封闭	对一切有限运算封闭
代数	含X的环 对“∪”余“′”封 对“∩”余“′”封闭	含X且对一切有限运算封闭
σ代数	对$\bigcup_{i=1}^{\infty}$及余“′”封闭 为代数且对不相交可列并封闭 为代数且对递增集序列并封闭*	含X且对一切可列运算封闭

*）参见§6定理1.10的注.

§4 由集族产生的环及σ代数

设**E**是任意不空集族，用⊙表示集运算：

∪、∩、\、“′”、Δ，$\bigcup_{i=1}^{\infty}$、$\bigcap_{i=1}^{\infty}$中某一种运算．显然由X的一切子集组成的集族为包含**E**的对运算⊙封闭的集族．令**F**(**E**)为包含**E**的对运算⊙封闭的所有集族之交，易证**F**(**E**)为包含**E**的对运算⊙封闭的最小集族，即

1）**F**(**E**)对运算⊙封闭且**F**(**E**)⊃**E**

2）设$\mathbf{F}$是任意包含$\mathbf{E}$的对运算$\odot$封闭的集族，则$\mathbf{F}\supset\mathbf{F}(\mathbf{E})$。

我们称$\mathbf{F}(\mathbf{E})$为由$\mathbf{E}$产生的对运算$\odot$封闭的集族。例如由$\mathbf{E}$产生的环$\mathbf{R}(\mathbf{E})$，由$\mathbf{E}$产生的σ代数$\mathbf{S}(\mathbf{E})$等。今后若不特别声明，符号$\mathbf{R}(\mathbf{E})$和$\mathbf{S}(\mathbf{E})$均作上述理解。

一般地说由任意集族$\mathbf{E}$产生的环$\mathbf{R}(\mathbf{E})$的实际构造比较复杂，但当$\mathbf{E}$是半环时，则甚为简单，此时$\mathbf{R}(\mathbf{E})$中每一集均可表为$\mathbf{E}$中有限个两两不相交集之并。

定理1.6 设$\mathbf{P}$是半环，令

$$\mathbf{R}=\{E: E=\bigcup_{j=1}^{n}E_j, E_j\in\mathbf{P}, E_i\cap E_j=\phi, i\neq j, n=1,2,\cdots\}$$

则$\mathbf{R}$是环且$\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$。

证明 首先验证$\mathbf{R}$满足定理1.5中之3）所述的条件。

因半环$\mathbf{P}$中含有空集ϕ，故$\mathbf{R}$是不空集族，设$E, F\in\mathbf{R}$，

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\quad F=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$$

且$E_i\in\mathbf{P}, F_j\in\mathbf{P}, i=1,2\cdots,n, j=1,2,\cdots,m, E_i\cap E_k=\phi, i\neq k, F_j\cap F_k=\phi, j\neq k$，那末

$$E\cap F=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)$$

其中$E_i\cap F_j\in\mathbf{P}$，且$E_i\cap F_j$，$i=1,2,\cdots$，$n, j=1,2\cdots m$，中的集两两不相交，故此$E\cap F\in\mathbf{R}$。

若更设$E\cap F=\phi$，那么从下式

$$E\cup F=\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}F_j\right)$$

知 $E\cup F\in\mathbf{R}$。

设$E\supset F$，要证$E\setminus F\in\mathbf{R}$，分两种情形来讨论。

1°设$E\in\mathbf{P}$，$F\in\mathbf{P}$，则从半环的定义知$E\setminus F$可表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交的集的并集，因而$E\setminus F\in\mathbf{R}$。

2°设$E\in\mathbf{R}$，$F\in\mathbf{R}$，因

$$E\setminus F=\bigcup_{i=1}^{n}E_i\setminus\bigcup_{j=1}^{m}F_j$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(E_i\setminus F_j)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}[E_i\setminus(E_i\cap F_j)]$$

由已证的1°知

$$E_i\setminus(E_i\cap F_j)\in\mathbf{R}$$

因$\mathbf{R}$对交及不相交并运算封闭，故

$$E\setminus F\in\mathbf{R}$$

这就证明了$\mathbf{R}$是包含$\mathbf{P}$的环，由$\mathbf{R}(\mathbf{P})$的定义我们有

$$\mathbf{R}\supset\mathbf{R}(\mathbf{P})$$

但因任一包含$\mathbf{P}$的环必包含$\mathbf{P}$的有限并，故

$$\mathbf{R}\subset\mathbf{R}(\mathbf{P})$$

从而$\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$。定理证完。

设$\mathbf{E}$是任意集族，A是X的固定子集，则记号

$$\mathbf{E}\cap A$$

表示一切形如 $E\cap A$ 的集组成的集族，其中$E\in\mathbf{E}$。记号$\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)$表示由集族$\mathbf{E}\cap A$产生的$A$上的$\sigma$代数。

定理1.9 设$\mathbf{E}$是任意集族，A是X的任意子集，则

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A=\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)。$$

证明 因$\mathbf{S}(\mathbf{E})\supset\mathbf{E}$，故

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A\supset\mathbf{E}\cap A),$$

易证$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A$为$A$上的$\sigma$代数，因而

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A\supset\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A). \tag{1.9}$$

另一方面，令

$$\mathbf{S}=\{E;\ E\in S(\mathbf{E}),E\cap A\in\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)\}$$

往证$\mathbf{S}$是σ代数．设$E\in\mathbf{S}$，$E_i\in\mathbf{S},i=1,2,\cdots$,则从$\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A)$为$A$上的$\sigma$代数知

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\cap A=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\cap A)\in\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A),$$

$$(X\backslash E)\cap A=A\backslash(E\cap A)\in\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A),$$

故$\mathbf{S}$是σ代数，但$\mathbf{E}\subset\mathbf{S}$,因而

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\subset\mathbf{S},$$

由上式及$\mathbf{S}$的定义我们有

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}(\mathbf{E}),$$

从而

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A\subset\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A). \tag{1.10}$$

因此由(1.9)和(1.10)两式得

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\cap A=\mathbf{S}(\mathbf{E}\cap A).$$

定理证完．

定理1.9所用的证明方法在测度论中经常使用，现归纳如下：设$\mathbf{E}$及$\mathbf{S}$是两集族，要证明关系式

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})\subset\mathbf{S}$$

我们只须证明$\mathbf{S}$是σ代数且包含$\mathbf{E}$。此外若需证明$\mathbf{S}(\mathbf{E})$中所有元素均满足某“性质A”，为此只须证明X中所有满足“性

质A"的子集组成的集族为σ代数且包含集族**E**，从而得出**S**(**E**)中所有元素均满足"性质A"。

§5 波雷尔集族

为了阐明§3—§4中所述的基本概念，本节我们来讨论一个十分重要的特殊情形，并介绍一些与之有关的术语。遍及本节，R表示全体实数所组成的集，我们称R为实数空间。设a,b是任意二个实数，且$a\leqslant b$，和平常一样，我们以$[a,b]$表示闭区间。

$$[a,b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$$

以(a,b)表示开区间

$$(a,b)=\{x: a<x<b\}$$

以$[a,b)$表示半开闭区间

$$[a,b)=\{x: a\leqslant x<b\}$$

以$(-\infty,a)$表示无穷开区间

$$(-\infty,a)=\{x: -\infty<x<a\}$$

符号$(-\infty,a]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$有类似的了解。

用**P**表示R中全体半开闭区间组成的集族，我们所以采用全体半开闭区间所组成的集族，而不采用全体开区间或全体闭区间所组成的集族，这是由于全体半开闭区间组成的集族是一个半环，而对开区间或闭区间则没有此性质。

R中由**P**所产生的σ代数**S**(**P**)，称为R中的波雷耳集族，并记为**B**，**B**中的集称为R中的波雷耳集。运用上节所指出的典型方法，不难证明波雷耳集族**B**等于下列诸集族之一所产

生的σ代数。

全体以有理数为端点的半开闭区间所组成的集族。

全体开区间所组成的集族。

全体闭区间所组成的集族。

全体无穷开区间$\{(-\infty,a)$; a实数$\}$所组成的集族。

全体开集所组成的集族$\mathbf{U}$。

全体闭集所组成的集族$\mathbf{F}$。

作为例子，下面我们证明：

$$\mathbf{B}=\mathbf{S}(\mathbf{U})$$

对于每一实数a，由关系式

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,a+\frac{1}{n})$$

知，单点集$\{a\}$为波雷耳集，由关系式

$$(a,b)=[a,b)\setminus\{a\}$$

可知，每个有限开区间是波雷耳集，又因实数空间上每个开集可以表为有限开区间的可列并，因此$\mathbf{B}\supset\mathbf{U}$，从而$\mathbf{B}\supset\mathbf{S}(\mathbf{U})$。另一方面，对每个实数$\{a\}$，由关系式

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})$$

知$\{a\}\in\mathbf{S}(\mathbf{U})$，又由关系式

$$[a,b)=(a,b)\cup\{a\}$$

可知$\mathbf{P}\subset\mathbf{S}(\mathbf{U})$从而有

$$\mathbf{B}=\mathbf{S}(\mathbf{P})\subset\mathbf{S}(\mathbf{U}),$$

这样便证明了$\mathbf{B}=\mathbf{S}(\mathbf{U})$。

由上面所述的事实知，R中所有有限区间，无限区间，开集、闭集均是波雷耳集。又因单点集是波雷耳集，从而全体有理数所成的集和全体无理数所成的集也是波雷耳集。

设E是R中任意固定子集，我们称集族$E\cap\mathbf{B}$为E中的波雷耳集族，$E\cap\mathbf{B}$中的集称为E中的波雷耳集。由定理1.9知，$E\cap\mathbf{B}$等于全体E中的半开闭区间，即全体形如

$$\{x;\ x\in E\ a\leqslant x<b, a\in R,\ b\in R\}$$

的集所产生的σ代数。

和通常的实变函数书一样，我们引进“$+\infty$”和“$-\infty$”两个数，分别读作正无穷和负无穷。规定它们与实数x之间的大小关系及代数运算如下：

1)序：$-\infty<x<+\infty$。

2)加法：$(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty$。

3)乘法：$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty$；$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty$。

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty & \text{当} x>0\\ 0 & \text{当} x=0\\ \mp\infty & \text{当} x<0.\end{cases}$$

4)减法：$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-x=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$。

5)除法：$\dfrac{x}{\pm\infty}=0$，

$$\frac{\pm\infty}{x}=\begin{cases}\pm\infty & \text{当} x>0\\ \mp\infty & \text{当} x<0.\end{cases}$$

此外还规定

6)绝对值：$|\pm\infty| = +\infty$；

注意下面的一切记号

$$(\pm\infty)+(\mp\infty);\ (\pm\infty)-(\pm\infty);$$

$$\frac{\pm\infty}{0};\ \frac{x}{0};\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty};\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty},$$

是没有意义的。我们把上面引进的$+\infty$和$-\infty$与实数集 R的并集称为广义实数集，它的元素称为广义实数。实数中极大多数运算的基本性质，对广义实数仍然成立，但也有个别性质，在广义实数中运用时要特别小心地考虑，例如从$a=b+c$并不能恒推出$a-b=c$。我们可以和数学分析中完全类似地来定义广义实数集上、下确界和广义实数序列$\{x_n\}$的极限的概念，并分别记为$\sup E$, $\inf E$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。和数学分析中稍有不同的是：我们这里允许上、下确界和极限取正无穷和负无穷。因此，任意一个广义实数集，不管它是否有界，一定存在上、下确界（有限或无穷）；任意一个单调广义实数序列一定有极限（有限或无穷）。

当广义实数序列$\{x_n\}$有极限a(a是广义实数)时，我们称$\{x_n\}$收敛于a，并记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$或$x_n \to a$。

广义实数序列的上极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$与下极限$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$分别定义为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} \{x_k\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} \{x_k\}.$$

和数学分析中完全相类似，我们可以证明广义实数序列$\{x_n\}$极限存在的充分必要条件为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

此时，我们有

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

下面我们来讨论广义实数空间的波雷耳集族。记全体广义实数所成的集为R^c，即

$$R^c=R\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}.$$

由R中波雷耳集族及单元素集$\{+\infty\}$，$\{-\infty\}$所产生的σ代数记为$\mathbf{B}^c$，并称它为广义波雷耳集族，$\mathbf{B}^c$中的集称为广义波雷耳集。不难看出，每个广义波雷耳集或者是一个波雷耳集或者是某个波雷耳集并单点集$\{+\infty\}$或$\{-\infty\}$，或者是某个波雷耳集并两点集$\{-\infty,+\infty\}$。

此外运用§4所指出的典型方法，不难证明，$\mathbf{B}^c$亦等于R中全体有限半开闭区间及单点集$\{-\infty\}$，$\{+\infty\}$所产生的σ代数。

下面我们将实数空间的一些概念推广到多维的情形。用R^n表示全体n维实数组成的集，并称R^n为n维实数空间。R^n中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$将简记为x，有时为明确起见则用$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表之。设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为R^n中两点，满足$a_i\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,n$。正如§3所述，集

$$\{x: x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), a_i\leqslant x_i<b_i, i=1,2,\cdots,n)\}$$

称为R^n中的半开闭区间或n维半开闭区间，并记之以$[a,b)$或

$[a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n)$。类似地可以定义$R^n$中的开区间$(a\ b)=(a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n)$，闭区间$[a,b]=[a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n]$；无穷开区间$(-\infty,b)=(-\infty,b_1;-\infty,b_2;\cdots;-\infty,b_n)$等等。

和R中一样，R^n中全体半开闭间区组成半环，由此半环产生的σ代数用符号$\mathbf{B}^n$记之，称为R^n中的波雷耳集族。$\mathbf{B}^n$中的集称为R^n中的波雷耳集或n维波雷耳集。与$\mathbf{B}$类似，$\mathbf{B}^n$亦等于下列诸集族之一所产生的σ代数：

R^n中全体以有理数为端点的半开闭区间所组成的集族。

R^n中全体开区间所组成的集族。

R^n中全体闭区间所组成的集族。

R^n中全体无穷区间所组成的集族。

R^n中全体开集所组成的集族。

R^n中全体闭集所组成的集族。

设E为R^n中任意固定子集，集族$E\cap\mathbf{B}^n$称为E中的n维波雷耳集族。而$E\cap\mathbf{B}^n$中的集，称为E中的n维波雷耳集。由定理1.9知$E\cap\mathbf{B}^n$等于全体形如

$$\{x;\ x\in E, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), a_i\leqslant x_i<b_i, a_i\in R, b_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

的集所产生的σ代数。

§6 单 调 族

在第二章中我们将会遇见某些问题，它们将无法运用§4所介绍的证明$\mathbf{S}(\mathbf{E})$中所有元素均满足某“性质A”的典型方法。为了解决那类问题，我们再引进一种新的集族。

设$\mathbf{M}$为不空集族，若对$\mathbf{M}$中元素的每一个单调序列

$\{E_n\}$（递增或递降）恒有

$$\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathbf{M},$$

则称$\mathbf{M}$是单调族。

下述定理给出了单调族、环和σ代数之间的关系。

定理1.10 集族$\mathbf{S}$为σ代数的充要条件是$\mathbf{S}$既是代数又是单调族。

证明 必要性显然。往证充分性，设$\mathbf{S}$是代数和单调族，又设$E_i \in \mathbf{S}, i=1,2,\cdots$，因$\mathbf{S}$是代数故

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{S} \quad n=1,2,\cdots$$

显然$\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}$是单调递增叙列，它的极限是$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$。根据$\mathbf{S}$是单调族的假设我们有$\bigcup_{i=1} E_i \in \mathbf{S}$，因此$\mathbf{S}$对可列并运算封闭，故$\mathbf{S}$是$\sigma$代数。定理证完。

注：从定理1.10充分性的证明可见，若$\mathbf{S}$是代数，且对递增集序列的极限封闭，那么$\mathbf{S}$就是σ代数。

如§4所述，设$\mathbf{E}$为不空集族，包含$\mathbf{E}$的最小单调族称为由$\mathbf{E}$产生的单调族，记为$\mathbf{M}(\mathbf{E})$。

定理1.11 设$\mathbf{A}$为代数则$\mathbf{M}(\mathbf{A})=\mathbf{S}(\mathbf{A})$。

证明 因$\mathscr{S}(\mathbf{A})$为包含$\mathbf{A}$之单调族，故

$$\mathscr{S}(\mathbf{A}) \supset \mathbf{M}(\mathbf{A}).$$

另一方面，因$\mathbf{M}(\mathbf{A})$为单调族，若能证明它亦为代数，那么由定理1.10知$\mathbf{M}(\mathbf{A})$是σ代数，从而得到

$$\mathscr{S}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{M}(\mathbf{A}),$$

因而

$$\mathfrak{S}(\mathbf{A})=\mathbf{M}(\mathbf{A}).$$

往证$\mathbf{M}(\mathbf{A})$为代数。首先证明$\mathbf{M}(\mathbf{A})$对余运算封闭。令

$$\mathbf{M}=\{E: E\in\mathbf{M}(\mathbf{A})且E'\in\mathbf{M}(\mathbf{A})\}$$

显然$\mathbf{A}\subset\mathbf{M}\subset\mathbf{M}(\mathbf{A})$，设$E_n\in\mathbf{M}$，$n=1,2,\cdots$且$E_n\uparrow E$，因$\mathbf{M}(\mathbf{A})$为单调族，故$E\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，注意$E'_n\downarrow E'$及

$$E'=(\bigcap_{n=1}^{\infty}E'_n)=\lim_{n\to\infty}E'_n$$

故$E'\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，因此$E\in\mathbf{M}$。同理可证当$E_n\downarrow E$且$E_n\in\mathbf{M}$则$E\in\mathbf{M}$。因此$\mathbf{M}$为单调族，从而$\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{A})$，这便证明了$\mathbf{M}(\mathbf{A})$对余运算封闭。其次证明$\mathbf{M}(\mathbf{A})$对交运算封闭。设$E$为$\mathbf{M}(\mathbf{A})$中任一固定集，令

$$\mathbf{M}_E=\{F: F\in\mathbf{M}(\mathbf{A}),\ E\cap F\in\mathbf{M}(\mathbf{A})\}$$

若我们能证明下面三点

1) 对每一$E\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，$\mathbf{M}_E$为单调族，
2) 对每一$E\in\mathbf{A}$，$\mathbf{M}_E=\mathbf{M}(\mathbf{A})$，
3) 对每一$E\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，$\mathbf{M}_E=\mathbf{M}(\mathbf{A})$，

那么由3)知，$\mathbf{M}(\mathbf{A})$对交运算封闭，从而$\mathbf{M}(\mathbf{A})$为代数，定理因此得证。现将1)2)3)的证明分别叙述如下：

1)的证明。因$\phi\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，由$\mathbf{M}_E$的定义知$\phi\in\mathbf{M}_E$，故$\mathbf{M}_E$为非空集族。设$\{F_n\}$为$\mathbf{M}_E$中的单调序列，因每一$F_n$都属于$\mathbf{M}(\mathbf{A})$，故$\lim\limits_n F_n\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$。又从$\mathbf{M}_E$的定义知$E\cap F_n\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，$n=1,2,\cdots$故从

$$E\cap(\lim_n F_n)=\lim_n(E\cap F_n)\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$$

知$\lim\limits_{n} F_n \in \mathbf{M}_E$。这便证明了$\mathbf{M}_E$为单调族。

2)的证明。设$E\in \mathbf{A}$，$F\in\mathbf{A}$，因$\mathbf{A}$为代数，从$\mathbf{M}_E$的定义知$F\in\mathbf{M}_E$，因而$\mathbf{A}\subset\mathbf{M}_E$，但由1)知$\mathbf{M}_E$为单调族，故$\mathbf{M}(\mathbf{A})\subset\mathbf{M}_E$。再由$\mathbf{M}_E$的定义$\mathbf{M}_E\subset\mathbf{M}(\mathbf{A})$，因而$\mathbf{M}_E=\mathbf{M}(\mathbf{A})$。

3)的证明。设$E\in\mathbf{M}(\mathbf{A})$，$F\in\mathbf{A}$，由2)已证得的结果得$E\in\mathbf{M}_F$，因而$F\in\mathbf{M}_E$，故$\mathbf{A}\subset\mathbf{M}_E$，由1)知$\mathbf{M}_E$为单调族，故得$\mathbf{M}(\mathbf{A})\subset\mathbf{M}_E$，再根据$\mathbf{M}_E$的定义我们有$\mathbf{M}_E=\mathbf{M}(\mathbf{A})$，这便证明了3)。定理全部证完。

§7 π 族和 λ 族

E.Б.邓肯引入另一种集族，以代替单调族。在概率论中使用它将更为方便。

非空集族$\mathbf{C}$称为π族，如果它满足条件：若$E,F\in\mathbf{C}$，则$E\cap F\in\mathbf{C}$。

集族$\boldsymbol{\lambda}$称为λ族，如果它满足下列条件：

1)$X\in\boldsymbol{\lambda}$

2)若$E,F\in\boldsymbol{\lambda}$，且$E\supset F$则$E\backslash F\in\boldsymbol{\lambda}$

3)设$\{E_n\}$为$\boldsymbol{\lambda}$中的递增序列，则$\lim\limits_{n} E_n\in\boldsymbol{\lambda}$。

显然由X的一切子集所组成的集族为λ族。

定理1.12 集族$\mathbf{S}$为σ代数的充要条件为$\mathbf{S}$既是π族又是λ族。

证明 必要性显然。往证充分性。因$\mathbf{S}$为λ族，故$\mathbf{S}$对余运算封闭，又因$\mathbf{S}$为π族，故对有限交运算封闭，从而$\mathbf{S}$为代数，再由定理1.10的注知，$\mathbf{S}$为σ代数。定理证完。

定理1.13 设$\mathbf{C}$为π族，$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$和$\mathbf{S}(\mathbf{C})$分别表示由$\mathbf{C}$产生的$\lambda$族和$\sigma$代数，则$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})=\mathbf{S}(\mathbf{C})$。



证明 因$\mathbf{S}(\mathbf{C})$是包含$\mathbf{C}$的λ族，故

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})\supset\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$$

另一方面因$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$为包含$\mathbf{C}$的$\lambda$族，若能证明它亦是$\pi$族那么由定理1.12知$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$为$\sigma$代数，从而得到

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})\subset\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$$

亦即

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})。$$

往证$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$为$\pi$族。设$E$为$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$中任意固定集，令

$$\boldsymbol{\lambda}_E=\{F:\quad F\in\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C}),\quad E\cap F\in\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})\}$$

若能证明下面三点

1） 对每一$E\in\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$，$\boldsymbol{\lambda}_E$为$\lambda$族，

2） 对每一$E\in\mathbf{C}$，$\boldsymbol{\lambda}_E=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$，

3） 对每一$E\in\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$，$\boldsymbol{\lambda}_E=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$，

那么由3)知，$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$为$\pi$族。从而定理得证。现将1)2)3)的证明分别叙述如下：

1)之证明。显然$E\in\boldsymbol{\lambda}_E$,设$F_1,F_2\in\boldsymbol{\lambda}_E$且$F_1\subset F_2$,那么$E\cap F_1\subset E\cap F_2$,由

$$E\cap(F_2\setminus F_1)=(E\cap F_2)\setminus(E\cap F_1)\in\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$$

知，$F_2\setminus F_1\in\boldsymbol{\lambda}_E$.此外由定理1.11的证明知，$\boldsymbol{\lambda}_E$为单调族，从而$\boldsymbol{\lambda}_E$为$\lambda$族。

2)之证明。因$\mathbf{C}$为π族，由$\boldsymbol{\lambda}_E$的定义易知$\mathbf{C}\subset\boldsymbol{\lambda}_E$，由1)$\boldsymbol{\lambda}_E$为$\lambda$族，故$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})\subset\boldsymbol{\lambda}_E$,再根据$\boldsymbol{\lambda}_E$的定义，我们有$\boldsymbol{\lambda}_E=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$。

3)之证明。

设$F\in\mathbf{C}$,由2)已证得的结果知$E\in\boldsymbol{\lambda}_F$,因而$F\in\boldsymbol{\lambda}_E$,故$\mathbf{C}\subset\boldsymbol{\lambda}_E$,但$\boldsymbol{\lambda}_E$为$\lambda$族故$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})\subset\boldsymbol{\lambda}_E$,再根据$\boldsymbol{\lambda}_E$的定义得$\boldsymbol{\lambda}_E=\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{C})$。定理全部证完。

习　　题

①证明关系式

$$(E\backslash F)\cup F=E$$

成立的充要条件为$F\subset E$。

②设$E\supset F\supset G$，求证$E\backslash G=(E\backslash F)\cup(F\backslash G)$。

③证明下列等式

$E\backslash F=E\backslash(E\cap F)=(E\cup F)\backslash F$;

$E\cap(F\backslash G)=(E\cap F)\backslash(E\cap G)$;

$(E\cup F)\backslash G=(E\backslash G)\cup(F\backslash G)$;

$(E\backslash G)\cap(F\backslash G)=(E\cap F)\backslash G$;

$(E\backslash F)\backslash G=E\backslash(F\cup G)$;

$E\backslash(F\backslash G)=(E\backslash F)\cup(E\cap G)$;

$(E\backslash F)\cap(G\backslash H)=(E\cap G)\backslash(F\cup H)$;

$(E\triangle F)=(E\cup F)\backslash(E\cap F)$。

④设$\{E_i\}$，$i=1,2\cdots n$；$\{F_j\}$，$j=1,2,\cdots,m$是给定的集，证明下列等式

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}Fj\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j);$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)\cup\left(\bigcap_{j=1}^{m}F_j\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(E_i\cup F_j);$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{m}F_j\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(E_i\backslash F_j)$$

$$=\bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\backslash F_j).$$

⑤设E_n, $n=1,2,\cdots$为集序列，证明

$$(\overline{\lim_n}\ E_n)'=\underline{\lim_n}\ E_n';$$

$$(\underline{\lim_n}\ E_n)'=\overline{\lim_n}\ E_n'.$$

⑥若 集 序 列E_n, $n=1,2,\cdots$的$\lim\limits_n E_n$存在，F为X的任意子集，证明$\lim\limits_n(E_n\Delta F)=(\lim\limits_n E_n)\Delta F$。

⑦设$\{E_n\}$ $n=1,2,\cdots$ 为 两 两 不 相 交 集 序 列，则 $\overline{\lim\limits_n}\, E_n=\phi$。

⑧设A与B为任意集，对每一自然数n，令

$$E_n=\begin{cases}A & \text{当}n\text{为奇数}\\ B & \text{当}n\text{为偶数}\end{cases}$$

证明

$$\underline{\lim_n}\ E_n=A\cap B,$$

$$\overline{\lim_n}\ F_n=A\cup B.$$

⑨设**R**为环，令

$$A=\{E: E\in\mathbf{R}\text{或}E'\in\mathbf{R}\}$$

证明**A**为代数。

⑩设集族**R**对交及差封闭，试问**R**是环吗？考虑例子：$X=\{a,b,c\}$，**R**为由$\{a\}$，$\{b\}$及ϕ集组成的集族。

⑪设A为X的任一子集，**R**和**S**分别为X上的环和σ代数，证明$\mathbf{R}\cap A$为环，$\mathbf{S}\cap A$为A上的σ代数。

⑫设$\mathbf{S}$为σ代数，$E\in\mathbf{S}$且$E\neq\phi$，试问对任意$F\subset E$，是否$F\in\mathbf{S}$?

⑬设$A\subset X$，$\mathbf{E}=\{A\}$，试求$\mathbf{S}(\mathbf{E})$.

⑭设T为不空指标集，$\{\mathbf{S}_t\}$，$t\in T$为X上的一族σ代数，试求包含在所有σ代数$\mathbf{S}_t, t\in T$,内的最大σ代数及包含所有σ代数$\mathbf{S}_t$, $t\in T$的最小σ代数。

⑮设$\mathbf{E}$为非空集族，试证对每一$E\in\mathbf{S}(\mathbf{E})$都存在一$\mathbf{E}$中的集序列$E_n, n=1,2,\cdots$(依赖于$E$)使得$E\in\mathbf{S}\{E_n\}$。

⑯设$\mathbf{P}$为半环，$\mathbf{R}_1$为$\mathbf{P}$中所有有限个集之并所组成的集族，证明$\mathbf{R}_1$等于定理1.8中的$\mathbf{R}$。

⑰定理1.11中的代数改为半环，它的结论仍成立吗？考虑例子：X为可列集，$\mathbf{P}$为X中全体单点集及ϕ集所组成的集族。

第二章　测度的扩张及完备化

§1 半环上的测度

设**C**为任意集族，若对每一$E\in\mathbf{C}$，对应一个广义实数$\mu(E)$，我们称μ为**C**上的广义实值集函数，简称μ为**C**上的广义实函数。

设μ为**C**上的广义实函数，满足下列条件：

1）若$\phi\in\mathbf{C}$，则$\mu(\phi)=0$，

2）μ为非负的，即

$0\leqslant\mu(E)\leqslant+\infty$，对一切$E\in\mathbf{C}$，

3）μ具有有限可加性，即若$E_i\in\mathbf{C}$，$i=1,2,\cdots n$，$E_i\cap E_j=\phi$，$i\neq j$，且$\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathbf{C}$则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i),$$

那末我们称μ为**C**上的有限可加测度。

若μ满足1）和2），且满足条件

4）μ具有完全所加性，即若$E_i\in\mathbf{C}$，$i=1,2,\cdots$，$E_i\cap E_j=\phi$，$i\neq j$，且$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathbf{C}$则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

那末我们称μ为完全可加或σ可加测度。因本书中绝大部份内容仅涉及完全可加测度，故以后若不特别声明，所谓测度均指完全可加测度。一般地说，C上的完全可加测度不一定是有限可加测度，但当$\phi\in$C时，断言是正确的，这可由等式

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \phi \cup \phi \cup \cdots$$

看出。但有限可加测度却不一定是完全可加测度（参见本章习题第1题）。

设μ为C上的测度(或有限可加测度)，若对每一个$E\in$C，均有$\mu(E)<+\infty$，则称μ为C上的有限测度(有限的有限可加测度)。若对每一个$E\in$C，存在可列个$E_i\in$C，$i=1,2,\cdots$，使得$\mu(E_i)<+\infty$，且$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则称$\mu$为C上的$\sigma$有限测度，显然$\mu$在C上有限，则必在C上$\sigma$有限。

例 X为实数空间R，C为R中全体勒贝格可测集，μ为勒贝格测度，则μ为σ有限测度。

定理2.1 设μ为半环P上的有限可加测度，则μ具有下列性质：

1) 单调性：即若E，$F\in$P且$E\subset F$，则$\mu(E)\leqslant\mu(F)$。

2) 可减性：即若E，$F\in$P且$E\subset F$，$F\setminus E\in$P，$\mu(F)<+\infty$，则

$$\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E).$$

3) 有限半可加性*)：即若$E\in$P，$E_i\in$P，$i=1,2,\cdots,n$且$E\subset\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，则

$$\mu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i).$$

4) 设$E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots, E_i\cap F_j=\phi, i\neq j, E\in\mathbf{P}$且$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\subset E$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\leqslant\mu(E).$$

更设μ为$\mathbf{P}$上的完全可加测度，则μ还满足下列性质：

5)完全半可加性*)：即若$E\in\mathbf{P}, E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots$，且$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则

$$\mu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

6)下连续性：即若$E_n\in\mathbf{P}, n=1,2,\cdots E_n\uparrow$且$\lim_{n}E_n\in\mathbf{P}$，则

$$\mu(\lim_{n}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

---

*) 若μ在半环$\mathbf{P}$上具有有限半可加性，则可推出下述断言"对任意$E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots,n$，$\bigcup_{i=1}^{n}E_n\in\mathbf{P}$，均有$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$"反之未必正确，当$\mathbf{P}$为环时，两者等价。同样$\mu$在半环$\mathbf{P}$上具有完全可加性，则可推出下述断言："对任意$E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathbf{P}$，均有

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)",$$

反之未必成立。当$\mathbf{P}$为σ代数时，两者等价。

7）上连续性：即若 $E_n \in \mathbf{P}, n=1,2,\cdots E_n \downarrow$ 且 $\lim\limits_n E_n \in \mathbf{P}$，又存在自然数$m$使$\mu(E_m) < +\infty$，则

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)^{*)},$$

证明 设μ为$\mathbf{P}$上的有限可加测度。

1）单调性的证明。设$E, F \in \mathbf{P}$及$E \subset F$那末我们有

$$F = E \cup (F \setminus E), \tag{2.1}$$

因$\mathbf{P}$为半环，由半环的定义，存在 $E_i \in \mathbf{P}, i=1,2,\cdots,n$，$E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$，使

$$F \setminus E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)，得

$$F \setminus E = E \cup (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$$

由μ之有限可加性得

$$\mu(F) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \geqslant \mu(E) \tag{2.3}$$

这便证明了μ的单调性。

2）可减性的证明。设 E，$F \in \mathbf{P}$ 及 $E \subset F$，$F \setminus E \in \mathbf{P}$，$\mu(E) < +\infty$，那么由(2.1)式及$\mu$的有限可加性得

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$$

---

*）条件"存在自然数m使$\mu(E_m) < +\infty$"不能省去，否则未必有$\mu(\lim\limits_n E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$。参见本章习题第②题。

从而

$$\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E).$$

3)有限半可加性的证明和完全半可加性的证明类似，证明从略。

4)设 $E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots,\ E_i\cap E_j=\phi, i\neq j, E\in\mathbf{P}$ 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\subset E$，对每一自然数$n$，我们有

$$E=\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cup\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right), \tag{2.4}$$

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcap_{i=1}^{n}(E\setminus E_i),$$

由半环的定义知对每一i，$E\setminus E_i\in\mathbf{R}(\mathbf{P})$，从而$E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathbf{R}(\mathbf{P})$，由定理1.8知存在$F_j\in\mathbf{P}, j=1,2,\cdots,m_n, F_j\cap F_k=\phi, j\neq k$，使

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m_n}F_j \tag{2.5}$$

由(2.4)和(2.5)及μ的有限可加性得

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)+\sum_{j=1}^{m_n}\mu(F_j)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$$

令$n\to\infty$我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\leqslant\mu(E).$$

5)完全半可加性的证明．设 $E\in\mathbf{P}$，$E_i\in\mathbf{P}, i=1,2,\cdots$，且

$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$， 令

$$E_1^* = E_1, \ E_2^* = E_2 \setminus E_1, E_3^* = E_3 \setminus (E_1 \cup E_2), \cdots$$

则 $E_i^* \in \mathbf{R}(\mathbf{P}), E_i^* \subset E_i, i = 1, 2, \cdots, \ E_i^* \cap E_j^* = \phi, i \neq j$，

且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^*$$

由定理1.8，对每一E_i^*，存在$E_{i1} \cdots, E_{im_i} \in \mathbf{P}$， $E_{ij} \cap E_{ik} = \phi, j \neq k$，且$E_i^* = \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}$， 因而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}$$

由

$$E = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_i} (E_{ij} \cap E)$$

及μ的完全可加性及单调性得

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij} \cap E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij}), \qquad (2.6)$$

由巳证的4)，我们有

$$\sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij}) \leq \mu(E_i),$$

综合(2.6)和(2.7)两式得

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

这便证明了μ的完全半可加性。

6)下连续性的证明。设 $E_n \in \mathbf{P}$，$n=1,2,\cdots$，$E_n \uparrow$ 且 $\lim_n E_n \in \mathbf{P}$，若有一$E_n$使$\mu(E_n)=+\infty$，那么$\mu(\lim_n E_n)=+\infty$，从而$\mu(\lim_n E_n)=\lim_n \mu(E_n)$。设 $\mu(E_n)<+\infty$，$n=1,2,\cdots$。令$E_0=\phi$，对每一i，由半环的定义，存在$E_{i1},\cdots\cdots$，$E_{im_i} \in \mathbf{P}$，$E_{ik} \cap E_{ij}=\phi$，$k \neq j$，使

$$E_i \backslash E_{i-1} = \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}.$$

类似于单调性证明中的(2.3)式，我们有

$$\mu(E_i)-\mu(E_{i-1})=\sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij}) \tag{2.8}$$

由

$$\lim_n E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_i \backslash E_{i-1})=\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}$$

及μ的完全可加性和(2.8)式得

$$\mu\left(\lim_n E_n\right)=\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu(E_i)-\mu(E_{i-1})\right)$$

$$=\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n}(\mu(E_i)-\mu(E_{i-1}))=\lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

这便证明了μ的下连续性。

7)上连续性的证明。设 $E_n \in \mathbf{P}$, $n=1,2,\cdots$, $E_n \downarrow$ 且 $\lim_n E_n \in \mathbf{P}$，又存在自然数m，使$\mu(E_m)<+\infty$，不妨设$\mu(E_1)<+\infty$。对于每一自然数$i$，存在$E_{i1}, E_{i2}, \cdots, E_{im_i} \in \mathbf{P}$，$E_{ik} \cap E_{ij}=\phi, k \neq j$，使

$$E_i \setminus E_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij} \qquad i=1,2,\cdots \tag{2.9}$$

显然我们有

$$E_1 = E_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \setminus E_{i+1}) \right), \; n=1,2,\cdots \tag{2.10}$$

$$E_1 = \lim_n E_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \setminus E_{i+1}) \right) \tag{2.11}$$

以(2.9)代入(2.10)和(2.11)得

$$E_1 = E_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij} \qquad n=1,2,\cdots \tag{2.12}$$

$$E_1 = \lim_n E_n \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_i} E_{ij}. \tag{2.13}$$

易知(2.12)，(2.13)式左边的集两两不相交，由测度μ的有限可加性和完全可加性得

$$\mu(E_1) = \mu(E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij}) \quad n=1,2,\cdots, \tag{2.14}$$

$$\mu(E_1) = \mu(\lim_n E_n) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(E_{ij}), \tag{2.15}$$

在(2.14)中令$n\to\infty$得

$$\mu(E_1)=\lim_n \mu(E_n)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\mu(E_{ij}) \qquad (216)$$

因 $\mu(E_1)<+\infty$，故$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\mu(E_{ij})<+\infty$，由(2.15)及(2.16)我们有

$$\lim_n \mu(E_n)=\mu\left(\lim_n E_n\right).$$

这便证明了μ的上连续性。

§2 测度从半环扩张到σ代数

设**P**为半环，本节应用 C.Caratheodory 的外测度理论来讨论半环**P**上的测度到它所产生的σ代数**S**(**P**)上的扩张。

设μ^*为定义在X的全体子集上的集函数，且满足下列条件：

1) $\mu^*(\phi)=0$，

2) 若$E\subset F$则$\mu^*(E)\leq\mu^*(F)$，

3) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$，

则称μ^*为X上的外测度。

由上述定义立即看出，外测度是非负的即

$$\mu^*(E)\geqslant 0 \qquad 凡E\in\mathbf{S}$$

又外测度具有有限半可加性，值得注意，外测度不一定具有完全可加性，甚至不是有限可加的。例如X为由100个

点组成的集，此100个点排成每列10点共计10列的方阵，对于X的任一子集E，定义$\mu^*(E)$为含有E中至少一个点的列的数目，容易看出μ^*为X上的外测度，但不具有有限可加性。

所谓μ^*可测集是外测度理论中极为重要的一个概念，下面我们阐明它的含意。

设μ^*为X上的外测度，$E\subset X$，若对任意$A\subset X$，均有

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E)$$

则称E为μ^*可测集。由外测度μ^*的有限半可加性，我们立即得到，X的子集E为μ^*可测集的充要条件是：对任意$A\subset X$，有

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E).$$

显然X上的外测度μ^*并不具有完全可加性，但将μ^*约束在全体μ^*可测集所组成的集族上时，它却具有完全可加性，这可从下述引理看出。

引理2.1 设μ^*为X上的外测度，$\mathbf{S}^*$为全体μ^*可测集所组成的集族，则

1）$\mathbf{S}^*$为σ代数，

2）μ^*为$\mathbf{S}^*$上的测度。

证明 先证明下面两事实：

i）$\mathbf{S}^*$为代数，

ii）若$E_i\in\mathbf{S}^*, i=1,2,\cdots,n$且$E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$，则对任意$A\subset X$，恒有

$$\mu^*(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap E_i). \qquad (2.17)$$

先证i)，由μ^*可测集的定义立即得出，ϕ，X均为μ^*可测集，且若E为μ^*可测集，则E'亦是μ^*可测集，因此$\mathbf{S}^*$对余运

算是封闭的。

现设 $E, F\in\mathbf{S}^*$, $A\subset X$, 则

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)=\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*(A\cap E\cap F')+\mu^*(A\cap E'\cap F)+\mu^*(A\cap E'\cap F') \tag{2.18}$$

以$A\cap(E\cup F)$代入上式中A之位置得

$$\mu^*(A\cap(E\cup F)=\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*(A\cap E\cap F')+\mu^*(A\cap E'\cap F) \tag{2.19}$$

由(2.18)及(2.19)两式得

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap(E\cup F)+\mu^*(A\setminus(E\cup F))$$

故此$E\cup F\in\mathbf{S}^*$,这便证明了$\mathbf{S}^*$为代数。

其次当$E\cap F=\phi$时，(2.19)式成为

$$\mu^*(A\cap(E\cup F))=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap F)$$

应用数学归纳法即可得出(2.17)式。

下面往证$\mathbf{S}^*$为σ代数。因我们已经证得$\mathbf{S}^*$为代数，由定理1.7要证明$\mathbf{S}^*$为σ代数，只须证明$\mathbf{S}^*$对两两不相交可列并运算封闭。设$E_i\in\mathbf{S}^*, i=1,2,\cdots,n,\cdots$且$E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$，令$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$则由(2.17)式及$\mu^*$的单调性知

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)+\mu^*(A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)')$$

$$\geqslant\mu^*(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i)+\mu^*(A\cap E')$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E')$$

对任意自然数n成立，令$n\to\infty$，并利用μ^*的完全半可加性得

$$\mu^*(A)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E')$$

$$\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E') \tag{2.20}$$

(2.20)式说明$E\in\mathbf{S}^*$，这便证明了$\mathbf{S}^*$为σ代数。

在(2.20)式中以$A\cap E$代A就得

$$\mu^*(A\cap E)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i)\geqslant\mu^*(A\cap E)$$

也就是说

$$\mu^*(A\cap E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i).$$

这便证明了ii)。上式中取$A=E$，即得μ^*的完全可加性。此外由外测度的性质知，μ^*是非负的且$\mu^*(\phi)=0$，这便证明了μ^*为$\mathbf{S}^*$上的测度。引理证完。

下面引理给出构造外测度的方法。

引理2.2 设$\mathbf{P}$为一集族，$\phi\in\mathbf{P}$，又设μ为$\mathbf{P}$上的非负广义实值函数且$\mu(\phi)=0$，对任意$E\subset X$，令

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i);\ E_i\in\mathbf{P},\ i=1,2,\cdots,$$

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\} \tag{2.21}$$

若E无$\mathbf{P}$中的可列复盖，令$\mu^*(E)=+\infty$，则μ^*为X上的外测度。

证明 由于$\mu(\phi)=0$及下确界的性质分别得出：

1) $\mu^*(\phi)=0$，

2) 若$E\subset F$，则$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$。

剩下来要证明的是μ^*满足完全半可加性。设$E_i\subset X, i=1,2,\cdots$

令$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，若有一$E_i$使$\mu^*(E_i)=+\infty$，则

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$$

若$\mu^*(E_i)<+\infty, i=1,2,\cdots$，令$\varepsilon$为任意正数，由$\mu^*$之定义，对每一$E_i$，存在$E_{ij}\epsilon\mathbf{P}$，$j=1,2,\cdots$使

$$E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}\qquad i=1,2,\cdots$$

及

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leqslant\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\quad i=1,2,\cdots$$

故

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon$$

因ε是任意的，令$\varepsilon\to 0$，就得到μ^*之完全可加性。故μ^*为X上的外测度，引理证完。

引理2.3 在引理2.2中更设$\mathbf{P}$为半环且μ为$\mathbf{P}$上的测度，则

1) 若$E\epsilon\mathbf{P}$，则$\mu^*(E)=\mu(E)$，

2) $\mathbf{S}(\mathbf{P})\subset\mathbf{S}^*$，

其中S^*为X中全体μ^*可测集组成的σ代数，而μ^*由（2.21）确定。

证明 1)设$E\in\mathbf{P}$，因

$$E=E\cup\phi\cup\phi\cup\cdots$$

由μ^*的定义知，$\mu^*(E)\leqslant\mu(E)$。

另一方面，若$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$，因$\mu$为半环$\mathbf{P}$上的测度，由测度的完全半可加性，我们有

$$\mu(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

因此由μ^*的定义，我们有

$$\mu(E)\leqslant\mu^*(E)$$

这样对一切$E\in\mathbf{P}$，均有$\mu^*(E)=\mu(E)$。

2) 首先证明：对任意E，$F\in\mathbf{P}$，均有

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F\cap E'). \tag{2.22}$$

因

$$F=(F\cap E)\cup(F\backslash E), \tag{2.23}$$

由外测度的有限半可加性，我们有

$$\mu^*(F)\leqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F\backslash E) \tag{2.24}$$

因$\mathbf{P}$为半环，故存在$F_i\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots,n$。$\{F_i\}$两两不相交使

$$F\backslash E=\bigcup_{i=1}^{n}F_i\ ,$$

令$F_0=F\cap E$，那么$F_0\in\mathbf{P}$，且F_0，F_1，……，F_n两两不相交，由(2.23)我们有

$$F=\bigcup_{i=0}^{n}F_i\ ,$$

因μ为**P**上的测度，由已证的1)及μ^*的定义有

$$\mu^*(F)=\mu(F)=\sum_{i=0}^{n}\mu(F_i)\geqslant\mu(F\cap E)+\mu^*(F\backslash E)$$

$$=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F\backslash E), \qquad (2.25)$$

比较(2.24)和(2.25)得(2.22)。

(2) 其次设$E\in$**P**，又A是X的任意子集，如果$\mu^*(A)=+\infty$，则

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E),$$

如果 $\mu^*(A)<+\infty$，那么对任意 $\varepsilon>0$，存在$E_i\in$**P**，$i=1,2,\cdots$使$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$且

$$\mu^*(A)+\varepsilon\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

由已证的1)，(2.22)及外测度的完全半可加性得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i\cap E)+$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i\cap E')\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

因此

$$\mu^*(A)+\varepsilon\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

因ε是任意的，故

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

这便证明了 $E\in$**S***，从而**P**$\subset$**S***。但**S***是σ代数，故**S**(**P**)

$\subset \mathbf{S}^*$，这便证明了2)。引理证完。

引理2.4 设$\mathbf{P}$为任意集族且X可表为$\mathbf{P}$中可列个元素的并，μ为$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的测度且在$\mathbf{P}$上σ有限，则对任意$E\subset X$，存在

$E_i\in\mathbf{P}$，$\mu(E_i)<+\infty$，$i=1,2,\cdots$使$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$。若更设$\mathbf{P}$是半环，则上述$E_i$ $i=1,2,\cdots$可以选为两两不相交的。

证明 设E为X的任意子集，由假定存在$F_i\in\mathbf{P}$，$i=1,$

$2,\cdots$使$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，因$\mu$在$\mathbf{P}$上$\sigma$有限，故对每一集$F_i$，存在

$F_{ij}\in\mathbf{P}$，$\mu(F_{ij})<+\infty$，$j=1,2,\cdots$，使$F_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij}$，于是得到

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij}.$$

将集序列$\{F_{ij}, i, j=1,2,\cdots\}$重新排列为集序列$\{E_i.$

$i=1,2,\cdots\}$，则有$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，其中$E_i\in\mathbf{P}$，$\mu(E_i)<+\infty$，$i=1,$

$2,\cdots$。引理2.4的第一个结论得证。

若更设$\mathbf{P}$为半环，令

$$E_1^*=E_1,\ E_2^*=E_2\setminus E_1,\ E_3^*=E_3\setminus(E_1\cup E_2),\ \cdots$$

显然$E_i^*\in\mathbf{R}(\mathbf{P})$，$\mu(E_i^*)<+\infty$，$i=1,2,\cdots$且$E_i^*\cap E_j^*=\phi$，

$i\neq j$，由定理1.8知，每一E_i^*均可表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交集之并，因而存在$G_i\in\mathbf{P}$，$\mu(G_i)<+\infty$，$i=1,2,\cdots$，

$G_i \cap G_j = \phi$，$i \neq j$，使 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i^* = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$，但由已证得的第一结论，我们有

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

这样便得出引理2.4的第二个结论。引理证完。

引理2.5 设**P**为半环且X可表为**P**中可列个元素的并，μ_1和μ_2为**S**(**P**)上的测度，且在**P**上σ有限，又μ_1和μ_2在**P**上相等，则它们在**S**(**P**)上也相等。

证明 设$A \in$ **P**且$\mu_1(A) < +\infty$，令

$$\mathbf{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ ; A_i \in \mathbf{P}, A_i \cap A_j = \phi, i \neq j, n = 1, 2, \cdots \right\}$$

由定理1.8知**R**为环，容易证明**S**(**R**) = **S**(**P**)，因$A \in$ **R**，故**R** $\cap A$是A上的代数，因μ_1和μ_2在**P**上相等，对任意自然数n，及$A_i \in$ **P**，$i = 1, 2, \cdots n$，$A_i \cap A_j = \phi$，$i \neq j$，我们有

$$\mu_1\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(A_i \cap A)$$

$$= \mu_2\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A\right),$$

这就说明了μ_1和μ_2在**R** $\cap A$上亦相等。令

$$\mathbf{M} = \{ E ; E \in \mathbf{S}(\mathbf{P}) \cap A, \mu_1(E) = \mu_2(E) \}$$

那么对于$E_i \in$ **M**，$i = 1, 2, \cdots E_i \uparrow$或$E_i \downarrow$，注意$\mu_1$在**S**(**P**) $\cap A$上是有限测度，故由定理2.1，我们有

$$\mu_1(\lim_n E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_2(E_n)=\mu_2(\lim_n E_n)$$

因此**M**是单调族，但$\mathbf{M}\supset\mathbf{R}\cap A$，从而$\mathbf{M}\supset\mathbf{M}(\mathbf{R}\cap A)$，但由定理1.11及定理1.9，我们有

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}\cap A)=\mathbf{S}(\mathbf{R}\cap A)=\mathbf{S}(\mathbf{R})\cap A=\mathbf{S}(\mathbf{P})\cap A$$

因而

$$\mathbf{M}=\mathbf{S}(\mathbf{P})\cap A,$$

这就是说μ_1和μ_2在$\mathbf{S}(\mathbf{P})\cap A$上亦相等。

现设E为$\mathbf{S}(\mathbf{P})$中任一集，由引理的假设及引理2.4，存在$E_i\in\mathbf{P}$，$\mu(E_i)<+\infty$，$i=1,2,\cdots$，$E_i\cap E_j=\phi$，$i\neq j$，使$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，从而

$$\mu_2(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2(E\cap E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(E\cap E_i)=\mu_1(E),$$

这就是说在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上$\mu_1=\mu_2$。引理证完。

定理2.2 设**P**为半环，μ为**P**上的测度，则μ可扩张为σ代数$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的测度，若更设X可表为**P**中可列个元素之并，且μ在**P**上σ有限，则μ在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的扩张是唯一的，且扩张测度在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上σ有限。

证明 考虑引理2.3中的μ^*和$\mathbf{S}^*$，由引理2.2和引理2.1，μ^*为X上的外测度，且为$\mathbf{S}^*$上的完全可加测度，再根据引理2.3，$\mathbf{S}(\mathbf{P})\subset\mathbf{S}^*$且对每一$E\in\mathbf{P}$，$\mu^*(E)=\mu(E)$，因此$\mu^*$就是$\mu$在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的扩张测度。若更设$X$可表为**P**中可列个元素之并，且$\mu$在**P**上$\sigma$有限，那么根据引理2.4，$\mu^*$在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上亦$\sigma$有限。最后由引理2.5知，$\mu$在$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的扩张是唯一的。定理证完。

注 定理2.2中条件“μ_1和μ_2在**P**上σ有限”是必须的，否

则定理未必成立。例如X是实数空间R，**P**是R中全体半开闭区间所组成的半环，此时**S**(**P**)就是R中的波雷耳集族**B**。设x为R中任一固定点，对每一$E\in$**B**，令

$$\mu_1(E)=\begin{cases}0 & \text{当}E=\phi\\ +\infty & \text{当}E\neq\phi\end{cases},$$

$$\mu_2(E)=\begin{cases}0 & \text{当}E=\phi\text{或}\{x\}\\ +\infty & \text{当}E\neq\phi\text{及}\{x\}\end{cases},$$

则μ_1和μ_2均为**B**上的测度，且在**P**上相等，但它们在单点集$\{x\}$上不相等。因单点集为波雷耳集，故μ_1和μ_2不能在**B**中所有集上都相等。

我们必须强调指出，引理2.5的证明方法也是测度论中常用的典型方法之一。正如第一章§6所指出的那样，在证明引理2.5时，我们不能采用第一章§4所介绍的，证明**S**(**E**)中所有元素均满足某"性质A"的典型方法。因为我们无法证明

$$\mathbf{M}=\{E: E\in\mathbf{S}(\mathbf{P}),\ \mu_1(E)=\mu_2(E)\}$$

为σ代数。但运用单调族这一工具，我们的问题就迎刃而解了。

正如第一章§7所指出的那样，λ族和π族的方法可以代替单调族的方法，作为例子我们介绍一个概率中常用的定理。

定理2.3 设**C**为π族且$X\in$**C**，μ_1和μ_2是**S**(**C**)上的两个有限测度，又μ_1和μ_2在**C**上相等，则它们在**S**(**C**)上也相等。

证明 令

$$\mathbf{M}=\{E: E\in\mathbf{S}(\mathbf{C}),\mu_1(E)=\mu_2(E)\}$$

往证**M**为λ族。

1）由假定知$X\in$**M**。

2）若E，$F\in$**M**且$E\supset F$，那么由测度的可减性得

$$\mu_1(E\setminus F)=\mu_1(E)-\mu_1(F)=\mu_2(E)-\mu_2(F)=\mu_2(E\setminus F),$$

故$E\setminus F\in\mathbf{M}$。

3）若$E_n\in\mathbf{M}$，$n=1,2,\cdots$，且$E_n\uparrow$，那么由测度的下连续性

$$\mu_1(\lim_n E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_2(E_n)=\mu_2(\lim_{n\to\infty}E_n)$$

故$\lim E_n\in\mathbf{M}$。这便证明了$\mathbf{M}$为λ族。由假定$\mathbf{M}$包含π族$\mathbf{C}$，利用定理1.13及$\mathbf{M}$的定义我们有

$$\mathbf{M}=\mathbf{S}(\mathbf{C})$$

这就是说，μ_1和μ_2在$\mathbf{S}(\mathbf{R})$上相等。定理证完。

定理2.4 设$\mathbf{R}$是环且X可表为$\mathbf{R}$中元素的可列并，μ是$\mathbf{S}(\mathbf{R})$上的测度且在$\mathbf{R}$上σ有限，则对$\mathbf{S}(\mathbf{R})$中任意具有有限测度的集E及任意正数ε，存在$\mathbf{R}$中的一个集E_ε，使得$\mu(E\Delta E_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$。

证明 由引理2.3及测度扩张的唯一性可知

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,E_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots\right\}$$

因$\mu(E)<+\infty$，故存在$E_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots$，$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\leqslant\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2},$$

再根据测度的完全半可加性我们有

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$$

故存在正整数n_0使

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}E_i\right)+\frac{\varepsilon}{2},$$

令$E_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^{n_0}E_i$，那么$E_\varepsilon\in\mathbf{R}$，且

$$\mu(E\backslash E_\varepsilon)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\backslash E_\varepsilon\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\mu(E_\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(E_\varepsilon\backslash E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\backslash E\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)-\mu(E)\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

故

$$\mu(E\Delta E_\varepsilon)=\mu(E\backslash E_\varepsilon)+\mu(E_\varepsilon\backslash E)\leqslant\varepsilon.$$

定理证完。

§3 测度的完备化

设X为任意集，$\mathbf{S}$为X上的σ代数，μ为$\mathbf{S}$上的测度。设$N\subset X$，若存在集$A\in\mathbf{S}$，使得$\mu(A)=0$且$N\subset A$，则称N(对于测度μ)为可略集．X中全体μ可略集所组成的集族记为$\mathbf{N}$，若$\mathbf{N}\subset\mathbf{S}$，则称$\mu$为完备测度．$\sigma$代数上的测度未必免是完备的。例如$A$为$X$的固定子集，令$\mathbf{S}=\{X,\phi,A,A'\}$，那么$\mathbf{S}$为一$\sigma$代数。在$\mathbf{S}$上定义测度$\mu$如下：

$$\mu(\phi)=0,\ \mu(A)=0,\ \mu(A')=1,\ \mu(X)=1,$$

设$B\subset A$且$B\neq A$，显然B为μ可略集但它不属于$\mathbf{S}$，从而μ不是完备测度。

设μ_1为σ代数$\mathbf{S}_1$上的测度，μ_2是σ代数$\mathbf{S}_2$上的测度，若

1） $\mathbf{S}_1\subset\mathbf{S}_2$

2） μ_2为$\mathbf{S}_2$上的完备测度且对每一$E\in\mathbf{S}_1$，均有

$$\mu_1(E)=\mu_2(E)$$

那么我们称μ_2为μ_1的完备化测度。

对于σ代数上的测度，恒存在它的完备化测度，下面的定理2.5给出了建立完备化测度的一种方法。

定理2.5 设μ为σ代数$\mathbf{S}$上的测度，$\mathbf{N}$为μ-可略集族，令

$$\widetilde{\mathbf{S}}=\{E\cup N: E\in\mathbf{S},\ N\in\mathbf{N}\}$$

对于$\widetilde{\mathbf{S}}$中每一元素F，当F可表为$F=E\cup N$时，定义

$$\widetilde{\mu}(F)=\mu(E)$$

则1） $\widetilde{\mathbf{S}}$为包含$\mathbf{S}$的σ代数

2） $\widetilde{\mu}$为$\widetilde{\mathbf{S}}$上的完备化测度，并且对每一$E\in\mathbf{S}$，$\widetilde{\mu}(E)=\mu(E)$。

证明 先证1），显然ϕ为μ可略集，故$\mathbf{S}\subset\widetilde{\mathbf{S}}$。往证$\widetilde{\mathbf{S}}$在可列并运算下是封闭的，设$F_i\in\widetilde{\mathbf{S}}$，$i=1,2,\cdots$，不妨设

$F_i=E_i\cup N_i$，$E_i\in\mathbf{S}$，$N_i\subset A_i$，$A_i\in\mathbf{S}$，$\mu(A_i)=0$，$i=1,2,\cdots$

由下列关系式

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\cup N_i)=(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i),$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

及$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{S}$，$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$，就知道$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \widetilde{\mathbf{S}}$，这就是说$\widetilde{\mathbf{S}}$在可数并运算下是封闭的。

设$F \in \widetilde{\mathbf{S}}$，不妨设

$$F = E \cup N, E \in \mathbf{S}, N \subset A, A \in S, \mu(A) = 0。$$

那么由关系式

$$F' = (E \cup N)' = (E \cup A)' \cup (A \cap (E \cup N)')$$

及$(E \cup A)' \in \mathbf{S}$，$A \cap (E \cup N)' \in \mathbf{N}$就得出$F' \in \widetilde{\mathbf{S}}$，因而$\widetilde{\mathbf{S}}$在余运算下也是封闭的，这便证明了$\widetilde{\mathbf{S}}$为$\sigma$代数。

现证明2)。首先证明$\widetilde{\mu}$的定义是不含混的，设$F \in \widetilde{\mathbf{S}}$，且

$$F = E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2,$$

其中E_1和$E_2 \in \mathbf{S}$，$N_1 \subset A$，$N_2 \subset A$，$A \in \mathbf{S}$，$\mu(A) = 0$。因

$$E_1 \cup A = F \cup A = A \cup E_2$$

故

$$\mu(E_1 \cup A) = \mu(E_2 \cup A),$$

此外由测度的单调性及有限半可加性得

$$\mu(E_i) \leqslant \mu(E_i \cup A) \leqslant \mu(E_i) + \mu(A) = \mu(E_i), i = 1, 2$$

因而

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \cup A) = \mu(E_2 \cup A) = \mu_2(E),$$

这便证明了$\overline{\mu}$的定义是不含混的。

显然对每一$E \in \mathbf{S}$，我们有

$$\overline{\mu}(E) = \mu(E)$$

且$\tilde{\mu}$为非负的。设$F_i \in \tilde{\mathbf{S}}$，$i=1,2,\cdots$，$F_i \cap F_j = \phi$，$i \neq j$，不妨设

$$F_i = E_i \cup N_i \quad i=1,2,\cdots$$

其中$E_i \in \mathbf{S}$，$N_i \subset A$，$i=1,2,\cdots$，$A \in \mathbf{S}$，$\mu(A)=0$。因$F_i \cap F_j = \phi$，$i \neq j$，从而$E_i \cap E_j = \phi$，$i \neq j$。由关系式

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \tilde{\mu}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right)\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(F_i)$$

便得到$\tilde{\mu}$的完全可加性，因此$\tilde{\mu}$为$\tilde{\mathbf{S}}$上的测度。最后往证$\tilde{\mu}$为完备测度。设

$$F \subset E \cup N, \quad \tilde{\mu}(E \cup N) = \mu(E) = 0$$

其中$N \subset A$，$A \in \mathbf{S}$，$\mu(A)=0$。因此

$$F \subset E \cup A$$

而且$\mu(E \cup A)=0$，故

$$F = \phi \cup F \in \mathbf{S}$$

并且$\tilde{\mu}(F) = \mu(\phi) = 0$。这便证明了$\tilde{\mu}$为$\tilde{\mathbf{S}}$上的完备测度。定理全部证完。

§4 有限可加测度成为完全可加测度的条件

在具体构造测度时，往往需要考虑有限可加测度附加什么条件就能成为完全可加测度。本节中，我们给出有限可加测度

成为完全可加测度的几种充分条件．在本章§1中我们曾指出：半环上的完全可加测度一定是有限可加测度且具有完全半可加性及上，下连续性，下面的定理2.6说明完全半可加性也是半环上的有限可加测度成为完全可加测度的充分条件．

定理2.6 设μ为半环$\mathbf{P}$上的有限可加测度，满足下述条件：

"若$E_i \in \mathbf{P}, i=1,2,\cdots$且$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{P} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$"，

则μ为$\mathbf{P}$上的完全可加测度．

证明 只须证明μ具有完全可加性，设$E_i \in \mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$，$E_i \cap E_j = \phi$，$i \neq j$，且$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{P}$．因$\mu$是有限可加测度，由定理2.1的4)我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right), \tag{2.26}$$

又由定理的假设，我们有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), \tag{2.27}$$

综合(2.26)和(2.27)即得μ的完全可加性．定理证完．

下面的定理给出半环$\mathbf{P}$上的有限可加测度成为完全可加测度的另一充分条件，它在具体构造勒贝格测度和勒贝格-司蒂阶测度时，起着重要的作用，而且它还可以用于构造拓扑空间上的测度．

定理2.7 设μ为半环$\mathbf{P}$上的有限可加度且满足下述条件："对于任意$E \in \mathbf{P}$，$E_i \in \mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$且$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$及任意

给定的正数ε，则存在$F\in\mathbf{P}$，$F_i\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$使

1) $\mu(F)\geqslant\mu(E)-\varepsilon$，$\mu(F_i)\leqslant\mu(E_i)+\varepsilon/2^i$ $i=1,2,\cdots$

2) 存在自然数m使

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{m}F_i"$$

则μ是P上的完全可加测度。

证明 设 $E_i\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$，$E_i\cap E_j=\phi$，$i\neq j$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathbf{P}$，又$\varepsilon$是任意给定的正数。令$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，对上述$\{E_i\}$，$E$及$\varepsilon$，由定理的假设知，存在$F\in\mathbf{P}$，$F_i\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots$满足1)和2)，由2)及$\mu$的有限半可加性得

$$\mu(F)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\mu(F_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i),$$

再注意1)便有

$$\mu(E)-\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)+\varepsilon,$$

令ε趋于0就得

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

根据定理2.6，我们便知μ为$\mathbf{P}$上的完全可加测度。定理证完。

定理2.8 设μ为环$\mathbf{R}$上的有限可加测度且在$\mathbf{R}$下连续，即若$E_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots$且 $E_n\uparrow E\in\mathbf{R}$，那末

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n),$$

则μ为$\mathbf{R}$上的完全可加测度。

证明 设 $E_i \in \mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots$, $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$. 令 $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$,则 $F_n \in \mathbf{R}, n=1,2,\cdots$ 且 $F_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 由 μ 的下连续性及有限可加性得

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

因此 μ 在 $\mathbf{R}$ 上具有完全可加性。定理证完。

从定理2.8知，环 $\mathbf{R}$ 上的有限可加测度，若下连续，则一定具有完全可加性。然而环 $\mathbf{R}$ 上的有限可加测度若上连续，却未必具有完全可加性，参见本章习题第①题。但当 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的有限有限可加测度且上连续，那么它必是完全可加测度，这可由下述定理看出。

定理2.9 设 μ 为环 $\mathbf{R}$ 上的有限可加测度，且满足条件：

“若 $E_n \in \mathbf{R}$ 且 $E_n \downarrow \phi \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$”,

则 μ 是环 $\mathbf{R}$ 上的测度。

证明： 只须证 μ 是完全可加的，设 $E_i \in \mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots$, $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$, 且 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$. 令

$$F_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$$

那么，$F_n \in \mathbf{R}$. 且 $F_n \downarrow \phi$，由定理的条件得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0. \tag{2.28}$$

又从μ的有限可加性得

$$\mu(E)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)+\mu(F_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)+\mu(F_n)$$

上式令$n\to\infty$，由(2.28)式得

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

故μ是**R**上的完全可加测度。定理证完。

注1：定理2.9的条件并非测度的必要条件，参见本章习题第②题。

注2：定理2.8和定理2.9中的环**R**改为半环，定理未必成立，参见本章习题第⑤题。

§5 一维勒贝格测度及勒贝格－司帝阶测度

记全体实数所组成的集为**R**。本节我们将用定理2.7来建立R上的勒贝格测度(简称L测度)及勒贝格－司帝阶测度(简称$L.S.$测度)．设**P**是R中全体左闭右开区间$[a,b)$组成的半环，其中$a\leqslant b$，对于$[a,b)\in$**P**，定义

$$\mu([a,b))=b-a, \tag{2.29}$$

现验明这样定义的广义实函数μ满足定理2.7的条件，

从而μ是半环**P**上的测度。

1） 显然$\mu([a,b))>0$且$\mu(\phi)=0$。

2） μ在**P**上具有有限可加性。设$[a,b)\in\mathbf{P}$，$[\alpha_i,\beta_i)\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots,n$且此$n$个半开闭区间两两不相交又

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i).$$

将$\{[\alpha_i,\beta_i)\}$中的集重新编号而成为$\{[a_i,b_i)\}$，使得

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i),\tag{2.30}$$

并且$a=a_1$，$b=b_n$及

$$a_1<b_1=a_2<b_2=a_3<b_3=\cdots=a_{n-1}<b_{n-1}=a_n<b_n.\tag{2.31}$$

从(2.30)和(2.31)两式即得

$$b-a=b_n-a_1=(b_n-a_n)+(b_{n-1}-a_{n-1})+\cdots+(b_1-a_1),$$

于是

$$\mu([a,b))=\sum_{i=1}^{n}\mu([a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{n}\mu([\alpha_i,\beta_i)),$$

这便证明了μ在**P**上是有限可加的。

3）设$[a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$。令$\varepsilon$为给定的正数，并且$\varepsilon<b-a$，考虑

$$[a,b-\varepsilon)\in\mathbf{P}$$

$$[a_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ b_n)\in\mathbf{P},\ n=1,2,\cdots$$

则

i) $[a, b-\varepsilon) \subset [a, b)$；

$$[a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n) \supset [a_n, b_n) \in \mathbf{P}, \ n = 1, 2, \cdots.$$

ii) $\mu([a, b-\varepsilon)) = b - a - \varepsilon = \mu([a, b)) - \varepsilon$,

$$\mu([a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n)) = b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \mu([a_n, b_n)) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

iii) 因$[a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$，故

$$[a, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n),$$

从有限复盖定理知：存在自然数m使

$$[a, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{m} (a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n),$$

因而更有

$$[a, b-\varepsilon) \subset \bigcup_{n=1}^{m} [a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n),$$

这样便证明了(2.29)式所确定的μ在$\mathbf{P}$上满足定理2.7的条件，因而μ是$\mathbf{P}$上的测度。

用$\mathbf{B}$表示R中波雷耳集族，由第一章§5知，$\mathbf{B} = \mathbf{S}(\mathbf{P})$。显然由(2.29)式确定的$\mu$在$\mathbf{P}$上是有限的，故由定理2.2，$\mu$可唯一地扩张到$\mathbf{B}$上且扩张后的测度是$\sigma$有限的。然后应用定理2.5所提供的完备化方法将$\mathbf{B}$上的测度$\mu$完备化，得出$\widetilde{\mathbf{B}}$

上的完备测度$\widetilde{\mu}$.这个定义在σ代数$\widetilde{\mathbf{B}}$上的测度$\widetilde{\mu}$，我们称之为R中的勒贝格测度,而$\widetilde{\mathbf{B}}$中的集称为R中的勒贝格测可集。因此由定义即得：凡R中的波雷耳集必为R中的勒贝格可测集，有时为方便我们把$\mathbf{B}$上的不完备测度μ亦称为勒贝格测度。

现讨论R中的$L.S.$测度。设F是定义在R上的左连续不降实函数。对于$[a,b)\in\mathbf{P}$，定义

$$\mu_F([a,b))=F(b)-F(a) \tag{2.32}$$

和L测度一样，我们将验证(2.32)式所确定的广义实函数μ_F满足定理2.7的条件，从而μ_F是半环$\mathbf{P}$上的测度。显然μ_F在$\mathbf{P}$上是有限的，故由定理2.2，μ可唯一地扩张到$\mathbf{B}$上且扩张后的测度是σ有限的。然后应用定理2.5所提供的完备化方法将$\mathbf{B}$上的测度μ_F完备化，得到$\widetilde{\mathbf{B}}$上的完备测度$\widetilde{\mu}_F$。此完备测度$\widetilde{\mu}_F$称为R中的由F所引出的勒贝格－司帝阶测度，简称$L.S.$测度。有时$\mathbf{B}$上的不完备测度μ_F亦称为$L.S.$测度。下面我们验明μ_F满足定理2.7的条件。

1) 显然$\mu_F(\phi)=0$且$\mu_F([a,b))=F(b)-F(a)\geqslant 0$。

2) μ_F在$\mathbf{P}$上具有有限可加性。

设$[\alpha_i,\beta_i)\in\mathbf{P}$，$i=1,2,\cdots,n$并且$\{[\alpha_i,\beta_i)\}$中的集两两不相交，又

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i).$$

将$\{[\alpha_i,\beta_i)\}$中的集重新编号而成为$\{[a_i,b_i)\}$使得

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i).$$

并且$a=a_1, b=b_n$及

$$a_1<b_1=a_2<b_2=\cdots=a_{n-1}<b_{n-1}=a_n<b_n.$$

故此

$$F(b)-F(a)=F(b_n)-F(a_1)=[F(b_n)-F(a_n)]+[F(b_{n-1})-F(a_{n-1})]+\cdots+[F(b_1)-F(a_1)],$$

由此得

$$\mu_F([a,b))=\sum_{i=1}^{n}\mu_F([a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{n}\mu_F([a_i,\beta_i)),$$

这便证明了μ_F在P上是有限可加的。

3) 设$[a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$，$\varepsilon$是给定的正数，因$F$在$b$点是左连续，故存在实数$b'$，$b'<b$使

$$F(b)-F(b')<\varepsilon$$

又F在每一点a_n都是左连续，故对每一a_n，分别存在实数a_n'，使得$a_n'<a_n$并且

$$F(a_n)-F(a_n')<\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

考虑$[a,b')$，$[a_n',b_n)$，$n=1,2,\cdots$，则

i) $[a,b')\subset[a,b)$，$[a_n',b_n)\supset[a_n,b_n)$，$n=1,2,\cdots$，

ii) $\mu_F([a,b'))=\mu_F([a,b))-\mu_F([b',b))$

$$>\mu_F([a,b))-\varepsilon;$$

$$\mu_F([a_n',b_n))=\mu_F([a_n',a_n))+\mu_F([a_n,b_n))$$

$$<\mu_I([a_n,b_n))+\frac{\varepsilon}{2^n},$$

iii) 从 $[a,b)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$ 得

$$[a,b']\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n',b_n),$$

应用有限覆盖定理知，存在自然数m使

$$[a,b']\subset\bigcup_{n=1}^{m}(a_n',b_n),$$

因而更有

$$[a,b')\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n',b_n),$$

这样便证明了(3.32)式所确定的μ在P上满足定理2.7的条件，因而μ是P上的测度。

上面我们讨论了利用R上的左连续不降实函数来建立$L.S.$测度的问题。现讨论由已知R上不降实函数F建立$L.S.$测度的情形。令A为F的全体不连续点所组成的集，定义

$$F_1(x)=\begin{cases}F(x) & \text{当 } x\in X\setminus A\\ F(x-)^{*} & \text{当 } x\in A\end{cases}\qquad(2.33)$$

则F_1是定义在R上的左连续、不降实函数。事实上，对每个$x\in R$，

$$F_1(x)=F(x-)=\sup_{y<x}F(y)$$

---

*) $F(x_0-)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}F(x)$，$F(x_0+)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}F(x)$.

故F_1是不降实函数。其次设$x_0\in R$，对任意正数$\varepsilon>0$，存在$x'<x_0$使

$$F(x')>F_1(x_0)-\varepsilon$$

对于任意的$x''\in(x',x_0)$，由F的不降性得

$$F_1(x'')=\sup_{x''>y\geq x'}F(y)\geq F(x')>F_1(x_0)-\varepsilon$$

再由F_1的不降性得

$$|F_1(x_0)-F_1(x'')|=F_1(x_0)-F_1(x'')<\varepsilon$$

故此F_1是左连续的。

对于$[a,b)\in\mathbf{P}$，定义

$$\mu_F([a,b))=F_1(b)-F_1(a) \tag{2.34}$$

则由上述已证得的结果知：由(2.34)所定义的μ_F是半环$\mathbf{P}$上的测度，把μ_F在$\widetilde{\mathbf{B}}$上的扩张$\widetilde{\mu_F}$仍称为由F所引出的$L.S.$测度。注意，这时从(2.33)和(2.34)两式得

$$\mu_F([a,b))=F(b-)-F(a-).$$

§6 n维勒贝格测度及勒贝格－司蒂阶测度

记全体n维实数所组成的集为R^n。本节我们仍用定理2.7来建立R^n上的勒贝格测度及勒贝格－司蒂阶测度。

设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为R^n中两点，满足

$$a_i\leq b_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

此时我们将记为$a\leq b$。遍及本节我们将以I或$[a,b)$或$[a_1,b_1;$

$a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$表示以$a$，$b$为端点的左闭右开区间，其中$a \leqslant b$.用$\mathbf{P}^n$表示$R^n$中全体左闭右开区间$[a,b)$组成的半环，$\mathbf{B}^n$表示$R^n$中波雷耳集族，由第一章§5知，$\mathbf{B}^n = \mathbf{S}(\mathbf{P}^n)$. 对于$[a, b) \in \mathbf{P}^n$，定义

$$\mu([a,b)) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n). \tag{2.35}$$

我们将验证(2.35)式所确定的广义实函数μ满足定理2.7的条件，从而μ是$\mathbf{P}^n$上的有限测度，由定理2.2，μ可唯一地扩张为$\mathbf{B}^n$上的σ有限测度。最后应用定理2.5所提供的完备化方法将$\mathbf{B}^n$上的测度μ_P完备化，得出$\widetilde{\mathbf{B}^n}$上的完备测度$\widetilde{\mu}$。这个定义在σ环$\widetilde{\mathbf{B}^n}$上的测度$\widetilde{\mu}$，称为R^n的勒贝格测度或n维勒贝格测度，而$\widetilde{\mathbf{B}^n}$中的集称为n维勒贝格可测集。

往证(2.35)所确定的集函数μ满足定理2.7的条件。

1) 显然$\mu(\phi) = 0$且$\mu([a, b)) \geqslant 0$。

2) μ在$\mathbf{P}^n$上具有有限可加性，即若$I = [a,b)$，$I_i = [a^{(i)}, b^{(i)})$，$i = 1, 2, \cdots, m$，$\{I_i\}$两两不相交且$I = \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$则

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i). \tag{2.36}$$

用归纳法来证明。当$m = 2$时，我们有

$$I = I_1 \cup I_2$$

容易看出此时I仅有一条边是I_1和I_2对应边之并，而I，I_1和I_2的其余$n-1$条边是相同的。不妨设

$$[a,b) = [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}) \cup [a_1^{(2)}, b_1^{(2)}),$$

其中

$$b_1^{(1)} = a_1^{(2)}, \quad a_1 = a_1^{(1)}, \quad b_1 = b_1^{(2)}, \quad [a_j^{(1)}, b_j^{(1)})$$

$$= [a_j^{(1)}, \ b_j^{(1)}) = [a_j^{(2)}, b_j^{(2)}), \quad j = 2, 3, \cdots, \ n.$$

从而

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

$$= (b_1 - a_1^{(2)} + b_1^{(1)} - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

$$= (b_1^{(2)} - a_1^{(2)})(b_2^{(2)} - a_2^{(2)})\cdots(b_n^{(2)} - a_n^{(2)})$$

$$+ (b_1^{(1)} - a_1^{(1)})(b_2^{(1)} - a_2^{(1)})\cdots(b_n^{(1)} - a_n^{(1)})$$

$$= \mu(I_1) + \mu(I_2)$$

这便证明了μ在$\mathbf{P}^{(n)}$上有二项可加性。

设$m = k - 1 \geqslant 2$时(2.36)成立，往证$m = k$时(2.36)亦成立。此时$I_1, I_2, \cdots, I_m$中必存在一个$I_{i_0} = [a^{(i_0)}, b^{(i_0)})$，使$a \leqslant a^{(i_0)}$，$a \neq a^{(i_0)}$，$b^{(i_0)} = b$，不妨设$i_0 = 1$ $a_1 < a_1^{(1)}$，令

$$J = [a_1^{(1)}, b_1; \ a_2, b_2; \ \cdots; \ a_n, b_n);$$

$$K = [a_1, a_1^{(1)}; \ a_2 b_2; \ \cdots; \ a_n, b_n),$$

则$J, K \in \mathbf{P}^{(n)}$，$J \cap K = \phi$，$I_1 \subset J$，且存在某个$l > 1$使$I_l \subset K$，不妨设$l = 2$。

$$J = J \cap I = \bigcup_{i=1}^{m} (J \cap I_i) = (J \cap I_1) \cup (J \cap I_3) \cdots \cup (J \cap I_m)$$

$$K = K \cap I = \bigcup_{i=1}^{m} (K \cap I_i)$$

$$= (K \cap I_2) \cup (K \cap I_3) \cdots \cup (K \cap I_m),$$

因此，由归纳法假设有

$$\mu(I) = \mu(K) + \mu(J) = \mu(K \cap I_2) + \mu(K \cap I_3) + \cdots + \mu(K \cap I_m) + \mu(J \cap I_1) + \mu(J \cap I_2) + \cdots + \mu(J \cap I_m)$$
$$= \mu(I_1) + \mu(I_2) + \cdots + \mu(I_m).$$

3) 设 $I = [a,b)$，$I_i = [a^{(i)}, b^{(i)})$，$i = 1,2,\cdots$，且

$I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I^{(i)}$，又$\varepsilon$为给定的正数且$\varepsilon < \min_{j=1,\cdots,n} (b_j - a_j)$，取$b'$ $< b$，$a^{(i)\prime} < a^{(i)}$，$i = 1,2,\cdots$，使

$$\mu([a,b')) \geqslant \mu([a,b)) - \varepsilon;$$

$$\mu([a^{(i)\prime}, b^{(i)})) \leqslant \mu([a^{(i)}, b^{(i)})) + \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

而从

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I^{(i)}$$

得

$$[a,b'] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a^{(i)\prime}, b^{(i)}),$$

应用有限覆盖定理知，存在自然数m使

$$[a,b'] \subset \bigcup_{i=1}^{m} (a^{(i)\prime}, b^{(j)}),$$

因而更有

$$[a,b')\subset\bigcup_{i=1}^{m}[a^{(i)\prime},b^{(i)}),$$

这样便证明了μ_F在$\mathbf{P}^{(n)}$上满足定理2.7的全部条件，因而μ_F是$\mathbf{P}^{(n)}$上的测度。

现讨论R^n中的L.S.测度。设F是R^n上的实函数，对每一半开闭区间$I=[a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n)\in\mathbf{P}^n$，令

$$\begin{aligned}\mu_F(I)&=F(b_1,b_2,\cdots,b_n)\\&-\{F(a_1,b_2,\cdots b_n)+\cdots+F(b_1\cdots,b_{n-1},a_n)\}\\&+\{F(a_1,a_2,b_3,\cdots,b_n)+\cdots+F(b_1,\cdots b_{n-2},a_{n-1},a_n)\}\\&-\cdots\\&+(-1)^nF(a_1,a_2,\cdots,a_n),\end{aligned}\tag{2.37}$$

若F对每一变量$x_j(j=1,2,\cdots,n)$左连续，且对每一$I\in\mathbf{P}^{(n)}$，(2.37)确定的$\mu_F(I)\geqslant0$，我们将验证μ_F满足定理2.7的条件，从而μ_F是半环$\mathbf{P}^n$上的有限测度。由定理2.2μ可唯一地扩张为$\mathbf{B}^n$上的σ有限测度，再应用定理2.5所提供的完备化方法将$\mathbf{B}^n$上的测度μ_F完备化，得到$\widetilde{\mathbf{B}^n}$上的完备测度$\widetilde{\mu_F}$。$\widetilde{\mu_F}$称R^n中的由F所引出的L.S.测度或n维L.S.测度。

下面验明μ_F满足定理2.7的条件。

1) 显然$\mu_F(\phi)=0$，且由假定$\mu_F(I)\geqslant0$。

2) μ_F在$\mathbf{P}^n$上具有有限可加性，即若$I=[a,b)$，$I_i=[a^{(i)},b^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,m$ $\{I_i\}$两两不相交且$I=\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，则

$$\mu_F(I)=\sum_{i=1}^{m}\mu_F(I_i).\tag{2.38}$$

用归纳法来证明。当$m=2$时，我们有

$$I=I_1\cup I_2$$

为书写方便，我们对I，I_1，I_2为二维半开闭区间的情形来证明。和勒贝格测度的证明相似，我们不妨设

$$[a_1, b_1)=[a_1^{(1)}, b_1^{(1)})\cup[a_1^{(2)}, b_1^{(2)}),$$

$$[a_2, b_2)=[a_2^{(1)}, b_2^{(1)})=[a_2^{(2)}, b_2^{(2)}),$$

其中

$$a_1=a_1^{(1)},\ b_1=b_1^{(2)},\ b_1^{(1)}=a_1^{(2)}.$$

因

$$\mu_F(I)=F(b_1,b_2)-(F(b_1,a_2)+F(a_1,b_2))$$
$$+F(a_1,a_2);$$

$$\mu_F(I_i)=F(b_1^{(i)},b_2^{(i)})-(F(b_1^{(i)},a_2^{(i)})$$

$$+F(a_1^{(i)},b_2^{(i)}))+F(a_1^{(i)},a_2^{(i)}),i=1,2.$$

从而

$$\mu_F(I)=\mu_F(I_1)+\mu_F(I_2).$$

当I，I_1，I_2，为n维半开闭区间的情形可类似证明。设$m=k-1\geqslant 2$时(2.38)成立，证明当$m=k$时(2.38)亦成立的方法完全类似于勒贝格测度的情形，请读者自行完成。

3)设$I=[a,b)$，$I_i=[a^{(i)},b^{(i)})$，$i=1,2,\cdots$ 且$I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，

又ε是给定的正数，由于F对每一变量x_j左连续，用数学分析

中熟悉的方法不难证明存在$b'\in R^n$，$a^{(i)'}\in R^n$，使$b'<b$，$a^{(i)'}<a^{(i)}$，且

$$\mu_F([a,b'))\geqslant\mu_F([a,b))-\varepsilon;$$

$$\mu_F([a^{(i)'},b^{(i)}))\leqslant\mu_F([a^{(i)},b^{(i)}))+\frac{\varepsilon}{2^i},$$

$$i=1,2,\cdots,$$

而从 $I\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$得

$$[a,b']\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a^{(i)'},b^{(i)}),$$

应用有限覆盖定理知，存在自然数m使

$$[a,b']\subset\bigcup_{i=1}^{m}(a^{(i)'},b^{(i)}),$$

因而更有

$$[a,b')\subset\bigcup_{i=1}^{m}[a^{(i)'},b^{(i)}),$$

这样便证明了μ_F在$\mathbf{P}^{(n)}$上满足定理2.7的条件，因而μ_F是$\mathbf{P}^{(n)}$上的测度。

习　　题

①设X为全体正整数组成的集，$\mathbf{A}$为X中全体有限子集及其余集组成的代数。定义$\mathbf{A}$上的集函数μ如下：

$$\mu(E)=\begin{cases}0 & E\text{是有限集}\\ +\infty & E\text{是无穷集}\end{cases}$$

证明μ为**A**上的有限可加测度且上连续，但μ不是完全可加测度，亦不下连续。

②定理2.9的条件并非测度的必要条件。考察例子：设μ为勒贝格测度，令$E_n=(n,\infty)$，$n=1,2,\cdots$，那末$E_n\downarrow\phi$，但$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=+\infty$。

③在引理2.2中，若μ为**P**上的有限测度，试问外测度μ^*是否有限？考察例子：X是任意可数集，**P**为X中一切有限子集组成的集族，定义**P**上的集函数μ如下：设$E\in$**P**，令

$\mu(E)=E$中点的个数，

则μ为**P**上的有限测度。

④定理2.2中，半环**P**改为任意集族**C**，定理的唯一性未必成立。考察例子$X=\{a,b,c\}$，**C**$=\{(a\cup c),(b\cup c)\}$，那么**S(C)**为X中所有子集组成的集族。定义**S(C)**上两个有限测度μ_1和μ_2如下：

$$\mu_1(\{a\})=\mu_1(\{b\})=1,\mu_1(\{c\})=2;$$
$$\mu_2(\{a\})=\mu_2(\{b\})=2,\mu_2(\{c\})=1,$$

则μ_1和μ_2在**C**上相等，但它们在**S(C)**上不相等。

⑤定理2.8和2.9中的环改为半环，定理未必成立。考察例子：X是区间$0\leqslant x\leqslant 1$中一切有理数所组成的集，并设**P**是由形如

$$\{x:\ x\in X,a\leqslant x<b\}$$

的一切"半开闭区间"组成的半环，其中$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$，$a$和$b$是有理数，在**P**上定义集函数$\mu$如下：

$$\mu(\{x:x\in X,a\leqslant x<b\})=b-a,$$

则μ是**P**上的有限的有限可加测度，且上、下连续，但μ在**P**上

却不是完全可加的。

⑥设X是可列集，p为X上非负实函数，**C**为X中全体子集组成的集族，对每一$C \in \mathbf{C}$，令

$$\mu(C) = \sum_{x \in C} p(x)$$

$$\mu(\phi) = 0$$

证明μ是**C**上的σ有限测度。当p满足什么条件时，μ为有限测度？

⑦设μ为环**R**上的测度，$E_1, E_2, E_3 \in \mathbf{R}$则

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2),$$
$$\mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) + \mu(E_1 \cap E_2 \cap E_3) =$$
$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup E_3) + \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_1 \cap E_3)$$
$$+ \mu(E_2 \cap E_3),$$

上述等式可推广到n个集的情形。

⑧设μ为σ代数**S**上的测度，$E_n \in \mathbf{S}$，$n = 1, 2, \cdots$，证明

1) $\mu(\underline{\lim}_{n} E_n) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} \mu(E_n)$，

2) 若存在m，使 $\mu(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n) < +\infty$，那么

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} \mu(E_n) \leqslant \mu(\overline{\lim}_{n} E_n),$$

3) 若$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$，则$\mu(\overline{\lim}_{n} E_n) = 0$。

⑨设**P**为半环且X可表为**P**中可列个元素之并。μ_1和μ_2为

$\mathbf{S}(\mathbf{P})$上的测度且在$\mathbf{P}$上σ有限，若对每一$E\in\mathbf{P}$，有

$$\mu_1(E)\leqslant\mu_2(E),$$

则对每一$E\in\mathbf{S}(\mathbf{P})$，上述不等式仍成立。

⑩设$\mu_n, n=1,2,\cdots$为σ代数$\mathbf{S}$上的测度序列，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$也是$\mathbf{S}$上的测度。

⑪设μ为σ代数$\mathbf{S}$上的测度，$\mathbf{N}$为μ可略集族，$\widetilde{\mathbf{S}}=\{E\cup N: E\in\mathbf{S}, N\in\mathbf{N}\}$。证明$E\in\widetilde{\mathbf{S}}$的充要条件为：存在$A, B\in\mathbf{S}$，使$A\subset E\subset B$，且$\mu(B\setminus A)=0$。

⑫设μ为σ代数$\mathbf{S}$上的测度，$\mathbf{N}$为μ可略集族，令

$$\widetilde{\mathbf{S}}=\{E\cup N: E\in\mathbf{S}, N\in\mathbf{N}\},$$

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{S}}}=\{E\Delta N: E\in\mathbf{S}, N\in\mathbf{N}\},$$

证明$\widetilde{\mathbf{S}}=\widetilde{\widetilde{\mathbf{S}}}$。

⑬设F是R上的不降实函数，$\widetilde{\mu}_F$是F所引出的 $L.S.$ 测度，求证

i) $\widetilde{\mu}_F(\{a\})=F(a+)-F(a-)$,

ii) $\widetilde{\mu}_F([a,b])=F(b+)-F(a-)$,

iii) $\widetilde{\mu}_F((a,b))=F(b-)-F(a+)$,

iv) $\widetilde{\mu}_F((a,b])=F(b+)-F(a+)$,

v) $\widetilde{\mu}_F([a,+\infty))=F(+\infty)-F(a-)$,

vi) $\widetilde{\mu}_F((-\infty,+\infty))=F(+\infty)-F(-\infty)$,

vii) $\widetilde{\mu_F}((-\infty,a))=F(a-)-F(-\infty)$,

其中$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$,$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

⑭分别讨论下列函数所引出的$L.S.$测度

$$F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\leqslant 0\\ 1 & \text{当}x>0\end{cases},$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x\leqslant 1\\ \frac{1}{3} & \text{当}1<x\leqslant 3\\ 1 & \text{当}3<x\end{cases},$$

$$F_3(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\ ,\ -\infty<x<+\infty,$$

其中$f\geqslant 0$且黎曼可积.

⑮设F_1和F_2是R上两个不降实函数，若F_1和F_2在R中的稠密集上相等或F_1和F_2相差一个常数，证明F_1和F_2所引出的$L.S.$测度相等.

⑯设μ为R中波雷耳集族**B**上的测度，若μ在任意有限区间上的值有限，则必存在R上的不降实函数F，使它所引出的$L.S.$测度μ_F，在**B**上和μ相等.

第三章 可测空间与可测函数

§1 广 义 实 函 数

设X为一不空集，若对X中每一元素x，有一个广义实数y与之对应，那么我们称这个对应关系为X上的一个广义实函数。不取无穷值的广义实函数称为实函数。通常我们用一个字母，例如f，来代表广义实函数，此时记号$f(x)$就表示与x对应的广义实数，并称为函数f在x点之函数值。但有时我们也像通常数学分析书中那样，用$f(x)$代表函数本身。

当X为实数空间R时，X上的广义实函数便是普通实变函数论书中的广义实函数。对于任意不空集X上的广义实函数的各种运算可以和普通实变函数论书中完全一样地来定义。设f，g均为X上的广义实函数，α为一广义实数，我们规定

1） $f+g$： $(f+g)(x)$

$$=\begin{cases} f(x)+g(x) & x\in X\text{且右端有意义}^{*)} \\ 0 & x\in X\text{且}f(x)+g(x)\text{无意义时，} \end{cases}$$

2） $f\cdot g$： $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $\quad x\in X$，

3） αf： $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ $\quad x\in X$，

4） $f\geqslant g$： $f(x)\geqslant g(x)$ $\quad x\in X$，

5） $|f|$： $|f|(x)=|f(x)|$ $\quad x\in X$，

---

*）当$f(x)+g(x)$无意义时，我们规定$(f+g)(x)=0$是了为使$f+g$在整个X上都有意义而已，

更普遍地：

6）对于$0<\alpha<+\infty$，定义$|f|^\alpha$为

$$|f|^\alpha(x)=\begin{cases}|f(x)|^\alpha & 若\ |f(x)|<+\infty \\ +\infty & 若\ |f(x)|=+\infty\end{cases},$$

此外还规定

$$-g=(-1)g, \qquad f-g=f+(-1)g \quad .$$

下面我们介绍一些今后常用的符号。

设$\{f_n\}$是定义在集X的某个子集E上的广义实函数序列，又f是E上的广义实函数，若对每一$x\in E$，恒有$f_n(x)\to f(x)$，则称函数列$\{f_n\}$在E上收敛于函数f(有时，为明确起见，我们称$\{f_n\}$在E上处处收敛于f)，并记作$f_n\to f$，在E上。特别当E是X本身时，则简称函数列f_n收敛于f，并记为$f_n \xrightarrow{处处} f$。

如果X上的广义实函数序列$\{f_n\}$满足

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots \qquad 凡x\in E,$$

则称$\{f_n\}$在E上为递增的。当E为X时，则记为$f_n\uparrow$。如果满足

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots \qquad 凡x\in E,$$

则称$\{f_n\}$在E上为递减的。当E为X时，则记为$f_n\downarrow$。记号"$f_n\uparrow f$"表示$\{f_n\}$是递增的且$f_n\xrightarrow{处处}f$，记号"$f_n\downarrow f$"可类似理解。

为了以后讨论的需要，我们引进下面两种函数。设E为X的任意子集，我们定义χ_E如下：

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & 当x\in E \\ 0 & 当x\in X\setminus E\end{cases}$$

称之为集E的特征函数。集与它的特征函数存在一一对应关系，因此集的所有性质及运算均可用特征函数表达。容易验证集的特征函数具有下列性质：

1) $\chi_X = 1$， $\chi_\phi = 0$.

设E，F为X的任意子集，那末

2) $E \subset F$的充要条件为$\chi_E \leqslant \chi_F$.

3) $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

4) $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$，

特别地当$E \cap F = \phi$时，

$$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F ,$$

又

$$\chi_E + \chi_{E'} = 1.$$

5) $\chi_{E \setminus F} = \chi_E \cdot (1 - \chi_F)$，

特别地当$E \supset F$时，

$$\chi_{E \setminus F} = \chi_E - \chi_F .$$

6) $(\chi_E - \chi_F)^2 = \chi_{E \triangle F}$.

7) 设E_n，$n = 1, 2, \cdots$是任一集序列，则

$$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n} = \sup_n \chi_{E_n};$$

$$\chi_{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n} = \inf_n \chi_{E_n};$$

$$\chi_{\overline{\lim\limits_n} E_n} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \chi_{E_n};$$

$$\chi_{\lim\limits_{n} E_n} = \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}.$$

对X上的任一广义实函数f定义f^+和f^-如下：

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当} f(x) > 0 \\ 0 & \text{当} f(x) \leqslant 0 \end{cases},$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{当} f(x) < 0 \\ 0 & \text{当} f(x) \geqslant 0 \end{cases},$$

f^+和f^-分别称为f的正部分和负部分。容易看出f^+和f^-都是非负广义实函数，且满足下列等式：

$$f^+ = \sup\{f, 0\} = f\chi_{\{f(x)>0\}};\ ^{*)}$$

$$f^- = \sup\{-f, 0\} = -\inf\{f, 0\} = -f\chi_{\{f(x)<0\}};$$

$$f = f^+ - f^-;\quad |f| = f^+ + f^-;$$

$$f^+ = (|f| + f)/2;\quad f^- = (|f| - f)/2.$$

设α为非负广义实数，则

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+;(\alpha f)^- = \alpha f^-.$$

设α为非正广义实数，则

$$(\alpha f)^+ = -\alpha f^-;(\alpha f)^- = -\alpha f^+.$$

§2 可测空间与可测函数

设X为任意集，若在X上指定了一个σ代数$\mathcal{S}$，那么我们

---

*) $\sup\{f,g\}$定义为：$\sup\{f,g\}(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$，$x \in X$。同样定义$\inf\{f,g\}$。

称X和$\mathbf{S}$合起来构成一个可测空间，并记为$(X,\mathbf{S})$。$\mathbf{S}$中的集称为$(X,\mathbf{S})$中的可测集或$\mathbf{S}$可测集，简称可测集。

例1 设$X=R^n$，那么(R^n, B^n)是一个可测空间。

例2 设X为任一集，令

$$\mathbf{S}_1=\{X,\phi\},$$
$$\mathbf{S}_2=\{E:E\subset X\},$$

那么当X不是单元素集时，$(X,\mathbf{S}_1)$和$(X,\mathbf{S}_2)$为两个不同的可测空间。

设$(X,\mathbf{S})$为一可测空间，f为X上的广义实函数，若对任意实数c，恒有

$$\{x:f(x)<c\}\in\mathbf{S},$$

那么我们称f为$(X,\mathbf{S})$上的可测函数或$\mathbf{S}$可测函数，有时简称为可测函数。若可测函数f不取无穷值（即f是实函数），则称f为可测实函数。

设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，$E\in\mathbf{S}$，显然E的特征函数χ_E是一可测函数。

R^n上的连续函数f是可测空间$(R^n,\mathbf{B}^n)$上的可测实函数。事实上，由连续函数的性质知，对任意实数c，集$\{x: f(x)<c\}$是R^n中的开集，因而$\{x:f(x)<c\}\in\mathbf{B}^n$。

定理3.1 给定可测空间$(X,\mathbf{S})$，f为X上之广义实函数，则下列命题等价：

1) f是一个可测函数，

2) $\{x:f(x)\leqslant c\}\in\mathbf{S}$，

3) $\{x:f(x)>c\}\in\mathbf{S}$，

4) $\{x:f(x)\geqslant c\}\in\mathbf{S}$，

其中c为任意实数。

证明 我们只要证明关系式 1)⇒2)⇒3)⇒4)⇒1) 就够了，而它的真确性可由下面等式给出，

$$\{x: f(x)\leqslant c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)<c+\frac{1}{n}\},$$

$$\{x: f(x)>c\}=X\setminus\{x: f(x)\leqslant c\},$$

$$\{x: f(x)\geqslant c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)>c-\frac{1}{n}\},$$

$$\{x: f(x)<c\}=X\setminus\{x: f(x)\geqslant c\},$$

定理证完。

推论 若f为$(X,\mathbf{S})$上之可测函数，则$\{x: f(x)=c\}$对任意广义实数c均为可测集。

证明 若$c\neq\pm\infty$，则由

$$\{x: f(x)=c\}=\{x: f(x)\geqslant c\}\setminus\{x: f(x)>c\}$$

知道$\{x: f(x)=c\}$是可测集。

若$c=+\infty$，由

$$\{x: f(x)=+\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)>n\}$$

知$\{x: f(x)=+\infty\}$是可测集。

若$c=-\infty$，由

$$\{x: f(x)=-\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)<-n\}$$

知$\{x: f(x)=-\infty\}$是可测集。推论证完。

下面讨论可测函数的运算，定理中所考虑的可测函数均认为是定义在同一可测空间$(X,\mathbf{S})$上的。

引理3.1 设f和g为可测函数，则

$$\{x: f(x)+a<g(x)+b\}$$

是可测集，其中a和b为任意实数。

证明 记全体有理数为$r_1, r_2, \cdots$，由等式

$$\{x: f(x)+a<g(x)+b\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x: f(x)+a<r_n\}$$

$$\cap\{x: g(x)+b>r_n\}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\{x: f(x)<r_n-a\}$$

$$\cap\{x: g(x)>r_n-b\}]$$

可知引理之结论是成立的。证完。

定理3.2 设f是可测函数，α为任意广义实数，β是任意正实数，则$\alpha f, |f|^{\beta}$均为可测函数，若更设$f(x)\neq 0$，凡$x\in X$，那么$\frac{1}{f}$也是可测函数。

证明 1)往证αf可测，当$\alpha=0$时，有

$$\{x: \alpha f(x)<c\}=\begin{cases} X & 若 c>0 \\ \phi & 若 c\leqslant 0 \end{cases}$$

当$\alpha=+\infty$时，有

$$\{x: \alpha f(x)<c\}=\begin{cases} \{x: f(x)\leqslant 0\} & 若 c>0 \\ \{x: f(x)<0\} & 若 c\leqslant 0 \end{cases}.$$

当$\alpha=-\infty$时，有

$$\{x: \alpha f(x)<c\}=\begin{cases} \{x: f(x)\geqslant 0\} & 若 c>0 \\ \{x: f(x)>0\} & 若 c\leqslant 0 \end{cases}.$$

当$\alpha\neq 0, \pm\infty$时，有

$$\{x: \alpha f(x)<c\}=\begin{cases}\{x: f(x)<\frac{c}{\alpha}\} & 当\alpha>0\\ \{x: f(x)>\frac{c}{\alpha}\} & 当\alpha<0.\end{cases}$$

因各等式之右端皆为可测集，故αf是可测函数。

2）往证$|f|^{\beta}$可测，易知下面讨论中不妨设$c>0$，记

$$E=\{x: f(x)=+\infty\}$$

注意

$$E'\cap\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}=E'\cap\{x: |f(x)|<c^{\frac{1}{\beta}}\}$$

$$=E'\cap\{x: f(x)<c^{\frac{1}{\beta}}\}\cap\{x: f(x)>-c^{\frac{1}{\beta}}\},$$

便可知$E'\cap\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}$是可测的。再注意

$$E\cap\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}=\phi$$

便由

$$\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}=[E\cap\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}]\cup[E'\cap\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}],$$

可知$\{x: |f|^{\beta}(x)<c\}$是可测集，故$|f|^{\beta}$为可测函数。

3）往证$\frac{1}{f}$可测。因$f(x)\neq 0$，凡$x\in X$，故对任意实数c有

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)}<c\right\}=\begin{cases}\{x: f(x)<0\} & 当c=0\\ \{x: f(x)<0\}\cap\{x: f(x)>\frac{1}{c}\} & 当c<0\\ \{x: f(x)<0\}\cup\{x: f(x)>\frac{1}{c}\} & 当c>0\end{cases}$$

因上式右端的集均为可测集，故$\frac{1}{f}$是可测函数。定理证完。

定理3.3 设f,g为可测函数，则 $f+g$ 和 $f\cdot g$ 都是可测函数。

证明 1)往证$f+g$可测。记

$$E=[\{x:f(x)=+\infty\}\cap\{x:g(x)=-\infty\}]$$

$$\cup[\{x:f(x)=-\infty\}\cap\{x:g(x)=+\infty\}]$$

由$f+g$之定义可知

$$(f+g)(x)=\begin{cases}f(x)+g(x) & \text{当}x\in E' \\ 0 & \text{当}x\in E,\end{cases}$$

注意等式

$$E'\cap\{x:(f+g)(x)>c\}=E'\cap\{x:f(x)>c-g(x)\},$$

由定理3.1及引理3.1可知$E'\cap\{x:(f+g)(x)>c\}$是可测的，对任意实数c。又注意等式

$$E\cap\{x:(f+g)(x)>c\}=\begin{cases}E & \text{当}c<0 \\ \phi & \text{当}c\geqslant 0\end{cases}$$

便知$E\cap\{x:(f+g)(x)>c\}$对所有实数c均可测，
由

$$\{x:(f+g)(x)>c\}=[E\cap\{x:(f+g)(x)>c\}]\cup$$
$$[E'\cap\{x:(f+g)(x)>c\}]$$

便知$\{x:(f+g)(x)>c\}$可测，即$f+g$可测。

2) 往证$f\cdot g$可测。令

$$E_1=\{x:f(x)g(x)=+\infty\};$$
$$E_2=\{x:f(x)g(x)=-\infty\};$$
$$E_3=\{x:f(x)g(x)=0\};$$

$$E_4=X\setminus\bigcup_{i=1}^{3}E_i,$$

则E_1,E_2,E_3,E_4都是可测集。对于$x\in E_4$，我们有

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\},$$

由定理3.2及已证的1)知，上式右边为可测函数，从而对任意实数c

$$E_4\cap\{x:f(x)g(x)<c\}$$

为可测集。此外易知

$$E_1\cap\{x:f(x)g(x)<c\}=\phi,$$
$$E_2\cap\{x:f(x)g(x)<c\}=E_2,$$
$$E_3\cap\{x:f(x)g(x)<c\}=\begin{cases}E_3 & c>0\\ \phi & c\leqslant 0,\end{cases}$$

把这四部份并起来便得知$\{x:f(x)g(x)<c\}$为可测集，即$f\cdot g$为可测函数。定理证完。

推论 设f是可测函数，则f^n亦是可测函数，其中n是正整数。

证明 显然。

定理3.4 设$\{f_n\}$为可测函数序列，则下列函数

$$h(x)=\sup_n\{f_n(x)\};\qquad g(x)=\inf_n\{f_n(x)\};$$

$$f^*(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x);\qquad f_*(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x);$$

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x) & \text{当极限存在时}\\ 0 & \text{当极限不存在时}\end{cases}$$

都是可测函数。

证明 g的可测性由等式

$$\{x:g(x)<c\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)<c\}$$

得出。又从等式

$$h(x) = -\inf_n\{-f_n(x)\}$$

知h是可测的。其次，由

$$f^*(x) = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} f_m(x)$$

$$f_*(x) = \sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n} f_m(x)$$

分别得出f^*及f_*之可测性。

最后，记

$$B = \{x: f^*(x) > f_*(x)\},$$

易知这时

$$B' = \{x: f^*(x) = f_*(x)\},$$

由引理3.1知B可测，从而B'也可测，再注意

$$B' \cap \{x: f(x) < c\} = B' \cap \{x: f^*(x) < c\},$$

$$B \cap \{x: f(x) < c\} = \begin{cases} B & c > 0 \\ \phi & c \leq 0 \end{cases}$$

便得出了f之可测性。证完。

从定理3.4的证明中容易看出如下事实：若$f_1, f_2 \cdots f_n$是可测函数，则下式

$$h(x) = \max_{1\leq k\leq n}\{f_k(x)\}; \quad g(x) = \min_{1\leq k\leq n}\{f_k(x)\},$$

确定的函数都是可测函数。特别当f是可测函数时，$f^+ = \max\{f, 0\}$，$f^- = \max\{-f, 0\}$都是可测函数。

下面我们讨论可测空间的子空间的概念。设$(X, \mathbf{S})$为可测空间，$X_0 \subset X$，作X_0上的集族如下：

$$X_0\cap \mathbf{S}=\{X_0\cap E;E\in\mathbf{S}\}$$

易证$X_0\cap\mathbf{S}$为X_0上的σ代数，故$(X_0,X_0\cap\mathbf{S})$亦是一个可测空间。特别地当$X_0\in\mathbf{S}$时，我们有

$$X_0\cap\mathbf{S}\subset\mathbf{S}$$

此时，可测空间$(X_0,X_0\cap\mathbf{S})$称为$(X,\mathbf{S})$的子空间。

设f是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的可测函数，$X_0\subset X$，如果我们将f看作集X_0上的函数，那么不难看出f是$(X_0,X_0\cap\mathbf{S})$上的可测函数。反之若f是X上的广义实函数，若f看作X_0上的函数是$X_0\cap\mathbf{S}$可测的，此时f在$(X,\mathbf{S})$上未必可测，即使加设$X_0\in\mathbf{S}$，但f在$(X,\mathbf{S})$上仍未必可测。

§3 简单函数

设$(X,\mathbf{S})$是一个可测空间，$E_1,E_2\cdots,E_n$为X中两两不相交的可测集，$a_1,a_2\cdots,a_n$是一组实数，凡可写成形如

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x)$$

的函数f称为简单函数。以后我们恒假定简单函数定义中的$E_1,E_2,\cdots,E_n$满足条件

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i.$$

这并不失去普遍性，事实上令$E_0=X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}E_i$及$a_0=0$，那么便有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x) \quad 而 \quad \bigcup_{i=0}^{n}E_i=X.$$

我们着重指出简单函数是实函数，它仅取有限个实数值且每一个值是在一个可测集上取的。不难看出简单函数是可测实函数。

定理3.5 设f,g均是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的简单函数，a,b是任意两实数，则$|f|$，$af+bg,f\cdot g$都是简单函数。

证明 若f为简单函数，$|f|$亦是简单函数的证明是显然的。往证若f,g为简单函数，则$af+bg$亦是简单函数。设

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i} \quad 和 \quad g=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j},$$

其中E_i $i=1,2,\cdots,n$是两两不相交可测集，F_j $j=1,2,\cdots,m$亦是两两不相交可测集，且

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{j=1}^{m}F_j .$$

我们有

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\chi_{E_i\cap F_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i\cap F_j},$$

$$g=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i\cap F_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{E_i\cap F_j},$$

故

$$af+bg=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a\alpha_i+b\beta_j)\chi_{E_i\cap F_j},$$

因$E_i\cap F_j,i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$是两两不相交的$\mathbf{S}$可测

集，这便证明了$af+bg$是简单函数。类似地我们可以证明$f\cdot g$亦是简单函数。定理证完。

定理3.6 设f为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的非负可测函数，则存在递增的非负的简单函数序列$\{f_n\}$收敛于f。

证明 对于每一个自然数n，构造X上的函数如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n} & \text{当}\dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^n}, i=1,2,\cdots,n2^n\\ n & \text{当 } f(x)\geqslant n\end{cases},$$

显然每一个f_n是非负的简单函数，并且函数序列$\{f_n\}$是递增的。如果$f(x)<+\infty$，则当$n>f(x)$时，有

$$0\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

若$f(x)=+\infty$，则对每一n都有$f_n(x)=n$，因而对任一$x\in X$都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

定理证完。

推论 设f为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的可测函数，则存在简单函数序列$\{f_n\}$收敛于f且$|f_n|\leqslant|f|$，$n=1,2,\cdots$。

证明 因f为可测函数，故f^+和f^-为非负可测函数，由定理3.6存在非负简单函数序列$\{h_n\}$和$\{g_n\}$使$h_n\uparrow f^+$，$g_n\uparrow f^-$。令

$$f_n=h_n-g_n\quad n=1,2,\cdots,$$

那么$\{f_n\}$为简单函数序列且$\{f_n\}$处处收敛于f，又

$$|f|\leqslant h_n+g_n\leqslant f^++f^-=|f|$$

推论证完。

习 题

①可测空间里面，有没有不可测子集存在？

②是否存在这样的一个可测空间$(X,\mathbf{S})$，使得X上的一切广义实函数均为可测函数？

③设$(X,\mathbf{S})$是可测空间，f为X上的广义实函数，A为实数空间R上的稠密子集（例如A是全体有理数所组成的集），试证f可测的充要条件：对每一$a\in A$,有

$$\{x:f(x)<a\}\in\mathbf{S}.$$

④举例说明，在$(X,\mathbf{S})$上，$|f|$可测但f却不一定可测。

⑤设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，证明χ_E可测的充要条件为E是可测集。

⑥设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，f在X上恒等于常数，证明f可测。

⑦设f是实数空间R上的增函数，证明f是波雷耳可测函数（即f为$(R,\mathbf{B})$上的可测函数）。

⑧设X为任意集，$X_0\subset X$，$\mathbf{S}_0$为X_0上的σ代数。令

$$\mathbf{S}_1=\{E:E\subset X,X_0\cap E\in\mathbf{S}_0\};$$

$$\mathbf{S}_2=\mathbf{S}_0\cup\left[X_0'\cup\mathbf{S}_0\right],$$

其中$X_0'\cup\mathbf{S}_0=\left\{X_0'\cup E:E\in\mathbf{S}_0\right\}$.证明$\mathbf{S}_1$和$\mathbf{S}_2$均是$X$上的$\sigma$代数且$\mathbf{S}_2\subset\mathbf{S}_1$.

⑨设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，f为X上的广义实函数。$X_n\subset X$，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，且$f$在$(X_n,X_n\cap\mathbf{S})$上可测，$n=1,2,\cdots$，试问$f$是否

$(X,\mathbf{S})$上的可测函数？在什么条件下结论是真确的？

⑩设f为$(X,\mathbf{S})$上的有界可测函数，证明存在简单函数列$\{f_n\}$一致收敛于f且$|f_n|\leqslant|f|, n=1,2,\cdots$.

⑪设$f_1,f_2\cdots,f_n$是$(X,\mathbf{S})$上的可测实函数，g是n维实数空间上的连续函数，证明$g(f_1,f_1,\cdots,f_n)$为$(X,\mathbf{S})$上的可测实函数。（提示：用定理3.6推论.）

⑫设X是任意集，$\mathbf{C}$为X的子集组成的π族且$X\in\mathbf{C}$，$\mathbf{H}$是X上的广义实函数族，具有下述性质：

i）$\mathbf{H}$包含$\mathbf{C}$中所有集的特征函数，

ii）$\mathbf{H}$中任意两个函数的线性组合仍属于$\mathbf{H}$，

iii）若$f_n\in\mathbf{H}$且$0\leqslant f_n\uparrow f$，则$f\in\mathbf{H}$.

证明$\mathbf{H}$包含所有$\mathbf{S}(\mathbf{C})$可测函数。

⑬设$f_1,f_2,\cdots,f_n$是$(X,\mathbf{S})$上的可测实函数，g是$(R^n,\mathbf{B}^n)$上的可测函数，证明$g(f_1,f_2,\cdots,f_n)$是$(X,\mathbf{S})$上的可测函数。（提示：用第⑫题。）

第四章　测度空间与积分

§1　测度空间上广义实函数的积分

设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，μ为$\mathbf{S}$上的测度，我们称一个可测空间$(X,\mathbf{S})$和它上面的测度，合起来构成一个测度空间，并用$(X,\mathbf{S},\mu)$表之。特别地当μ为有限测度时，则称$(X,\mathbf{S},\mu)$为有限测度空间；当$\mu(X)=1$时，则称$(X,\mathbf{S},\mu)$为概率空间；当μ为σ有限测度时，则称$(X,\mathbf{S},\mu)$为σ有限测度空间；当μ为完备测度时，则称$(X,\mathbf{S},\mu)$为完备测度空间。

例　设X为实数空间R，$\mathbf{S}$为R中全体勒贝格可测集组成的σ代数，μ为勒贝格测度，那末$(X,\mathbf{S},\mu)$为一σ有限测度空间。

设$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间，$X_0\subset X$且$X_0\in\mathbf{S}$，易见当μ看作$X_0\cap\mathbf{S}$上的集函数时，它是$X_0\cap\mathbf{S}$上的测度，因而$(X_0,X_0\cap\mathbf{S},\mu)$也是测度空间，它称为测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$的子空间。

本节目的是在测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上定义广义实函数的积分，分三个步骤来进行。

Ⅰ)非负简单函数之积分

设$f=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$为定义在$(X,\mathbf{S},\mu)$上之非负简单函数，

那么广义实数$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)$称为$f$在$(X,\mathbf{S},\mu)$上的积分，简称$f$

的积分，并记作$\int f du$，即

$$\int f(x)du=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i).$$

上述定义是不含混的，事实上若f的另一表达式为

$$f=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j},$$

则当$E_i\cap F_j\neq\phi$时，有$\alpha_i=\beta_j$。注意到$X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$和$X=\bigcup_{j=1}^{m}F_j$，并利用测度的有限可加性我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap F_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\mu(F_j\cap E_i)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j),$$

由此可见非负简单函数的积分与函数的表达式无关。

由非负简单函数f的积分定义不难看出$0\leq\int f d\mu\leq+\infty$，应该强调指出，由于测度$\mu$取广义实值，故非负简单函数的积分值可能取$+\infty$。

引理4.1 设f和g是非负简单函数，则

1）若 $f\geq g$*) 时，那么$\int f d\mu\geq\int g d\mu$，

2）$\int(f+g)d\mu=\int f d\mu+\int g d\mu$，

*）符号"$f\geq g$"表示对一切$x\in X$，均有$f(x)\geq g(x)$。

特别当$\int g d\mu < +\infty$时有

$$\int (f+g) d\mu - \int g d\mu = \int f d\mu.$$

证明 不妨设(参看定理3.5的证明)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}; \quad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{E_i}, \tag{4.1}$$

其中$E_1, E_2, \cdots, E_n$为两两不相交的非空可测集且$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$\alpha_i$和$\beta_i$，$i=1,2,\cdots,n$为实数。若$f \geq g$，则$\alpha_i \geq \beta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，从而

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(E_i) = \int g d\mu,$$

这便证明了1)。往证2)由(4.1)式得

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \chi_{E_i},$$

故

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(E_i) = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

这便证明了2)。引理证完。

Ⅰ 非负可测函数的积分

设f是测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的非负可测函数，那么规定f

的积分$\int fd\mu$ 为

$$\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$$

其中$\{f_n\}$是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的非负简单函数序列，且$f_n\uparrow f$。由定理3.6知，这样的函数序列是存在的。易知$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$恒存在(等于一个实数或$+\infty$)。从下面的引理可知上述定义是不含混的。

引理4.2 {设f_n}和$\{g_n\}$都是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的非负简单函数递增序列，且他们在X上有相同的极限即$\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}g_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu.$$

证明 如果我们能够证明命题甲："设$\{f_n\}$是递增的非负简单函数序列，又φ是非负简单函数，且对每一$x\in X$，有$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geq\varphi(x)$，则$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu\geqslant\int\varphi d\mu$"。那么立即可以推出引理4.2的结论。事实上，对于固定的自然数k，我们有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geqslant g_k(x);\quad \lim_{n\to\infty}g_n(x)\geqslant f_k(x)\quad 凡\ x\in X$$

从而由命题A得

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu\geqslant\int g_k d\mu;\ \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu\geqslant\int f_k d\mu,$$

在上两式中令$k\to\infty$，即得引理4.2的结论。

往证命题甲，首先注意到当φ恒等于零时，命题甲自然成立。现设φ不恒等于零。令

$$X_1=\{x: \varphi(x)>0\};$$

$$M=\max_{x\in X_1}\varphi(x);\quad m=\min_{x\in X_1}\varphi(x),$$

因φ是简单函数，故M和m是存在的，显然有$0<m\leqslant M<+\infty$。任取实数ε使$0<\varepsilon<m$，对每一自然数n，构造集合

$$A_n=\{x: x\in X_1\text{且}f_n(x)>\varphi(x)-\varepsilon\},$$

易知$A_n\uparrow X_1$。

1）当$\mu(X_1)=+\infty$时，由引理4.1我们有

$$\int f_n d\mu\geqslant\int f_n\chi_{A_n}d\mu\geqslant\int(\varphi-\varepsilon)\chi_{A_n}d\mu$$

$$\geqslant\int(m-\varepsilon)\chi_{A_n}d\mu=(m-\varepsilon)\mu(A_n),$$

上式中令$n\to\infty$，并注意关系式

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(X_1)=+\infty$$

我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=+\infty$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu\geqslant\int\varphi d\mu.$$

2）当$\mu(X_1)<+\infty$时，令$B_n=X_1\setminus A_n, n=1,2,\cdots$，易见$B_n\downarrow\phi$，由引理4.1我们有

$$\int f_n d\mu \geqslant \int (\varphi - \varepsilon)\chi_{A_n} d\mu = \int \varphi\chi_{A_n} d\mu - \int \varepsilon\chi_{A_n} d\mu$$

$$= \int \varphi\chi_{X_1} d\mu - \int \varphi\chi_{B_n} d\mu - \varepsilon\mu(A_n)$$

$$\geqslant \int \varphi\chi_{X_1} d\mu - M\mu(B_n) - \varepsilon\mu(X_1),$$

上式中令$n\to\infty$，并注意关系式

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geqslant \int \varphi \chi_{X_1} d\mu - \varepsilon\mu(X_1).$$

再令$\varepsilon\to 0$得

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geqslant \int \varphi \chi_{X_1} d\mu = \int \varphi d\mu,$$

这便证明了引理4.2.引理证完。

引理4.3 设f和g为非负可测函数，则

1)若$f\geqslant g$，那么$\int f d\mu \geqslant \int g d\mu$，

2) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

证明 对于f和g，我们都按定理3.6证明中的方法选取非负简单函数序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$使

$$f_n \uparrow f \text{和} g_n \uparrow g,$$

由定理3.5知，$\{f_n+g_n\}$亦是简单函数序列且

$$f_n + g_n \uparrow f + g.$$

根据非负可测函数的积分定义及引理4.1我们有

$$\int(f+g)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int(f_n+g_n)\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int f_n d\mu+\int g_n d\mu\right)$$

$$=\int fd\mu+\int gd\mu.$$

若更设$f\geqslant g$，易知对每一自然数n均有

$$f_n\geqslant g_n,$$

由引理4.1知

$$\int f_n d\mu\geqslant\int g_n d\mu,$$

令$n\to\infty$得

$$\int fd\mu\geqslant\int gd\mu,$$

引理证完。

Ⅱ)可测函数的积分

设f是定义在测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数，如果f的正部份f^+和f的负部份f^-中至少有一个的积分不是$+\infty$，则称f的积分存在。并规定f的积分为

$$\int fd\mu=\int f^+d\mu-\int f^-d\mu.$$

有时为明确起见，$\int fd\mu$又记为$\int_X fd\mu$。当$\int fd\mu$为实数时，称f是可积的。显然可测函数f可积的必要充分条件是$\int f^+d\mu$及$\int f^-d\mu$都不等于$+\infty$。

设有一个关于测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$的命题甲，所谓甲在

$(X, \mathbf{S}, \mu)$中几乎处处成立，是指在这空间中除去一个测度为零的可测集外，命题甲对于空间中其他的点均成立。以后为简便计，把测度为 0 的可测集称为零测集，用$a.e.$表示几乎处处。

例1 广义实函数f与g在$(X, \mathbf{S}, \mu)$上几乎处处相等($a.e.$相等）是指：存在一个零测集E，使得

$$E \supset \{ x: f(x) \neq g(x) \},$$

以后我们用记号$f = g \ a.e.$表示f和g几乎处处相等。

例2 广义实函数f在$(X, \mathbf{S}, \mu)$上几乎处处有限($a.e.$有限）是指：存在零测集E使

$$E \supset \{ x: |f(x)| = +\infty \}.$$

例3 广义实函数序列$\{ f_n \}$几乎处处收敛于广义实函数f是指：存在零测集E，使

$$f_n(x) \to f(x), \quad 凡 \ x \in E',$$

以后我们用记号$f_n \xrightarrow{a.e.} f$表示f_n几乎处处收敛于f。

引理4.4 设f和g是测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的可测函数，若$f = g \ a.e.$，则

$$\int f d\mu = \int g d\mu \tag{4.2}$$

这里等号之意义是：若上式之一边有意义，则另一边也有意义而且相等。

证明 先设f和g都是非负简单函数，不妨设

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}; \quad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{E_i}$$

由$f=g$, $a.e.$知 $\alpha_i=\beta_i$，当$\mu(E_i)\neq 0$.故由简单函数积分的定义得

$$\int f d\mu=\int g d\mu .$$

现设f, g是非负可测函数。对于f, g我们都按定理 3.6的证明中的方法选取非负简单函数序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$，使$f_n\uparrow f$和$g_n\uparrow g$，这时不难看出对于每一自然数n，我们有$f_n=g_n$, $a.e.$，由刚才已证得之事实有

$$\int f_n d\mu=\int g_n d\mu ,$$

对每一自然数成立，令$n\to\infty$得 $\int f d\mu=\int g d\mu$.

最后设f和g是可测函数，并且$f=g$, $a.e.$那末有

$$f^+=g^+ \ a.e. \text{ 和 } f^-=g^-, \ a.e. ,$$

从而

$$\int f^+ d\mu=\int g^+ d\mu ; \quad \int f^- d\mu=\int g^- d\mu . \tag{4.3}$$

若$\int f d\mu$和$\int g d\mu$之一存在，不妨设$\int f d\mu$存在，那么$\int f^+ d\mu$与$\int f^- d\mu$中有一个不是$+\infty$，因而$\int g^+ d\mu$和$\int g^- d\mu$中有一个不是$+\infty$，故积分$\int g d\mu$存在.再从(4.3)式便得(4.2)式。引理证完。

从引理4.4知，$a.e.$相等的函数，积分同时存在且相等或者积分同时不存在。因此在考虑可测函数的积分时，$a.e.$相等的函数可以不加以区别。更进一步，若f是X上$a.e.$有定义的广义实函数，如果存在$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的积分存在的可测函数g，使$f=g$ $a.e.$，那么我们称f的积分存在且规定

$$\int f d\mu = \int g d\mu .$$

特别地当g可积时，则称f是可积的。今后我们可以看到这样规定，在讨论积分问题时，有其方便之处。

下面我们来定义可测集上的积分。设f是X上$a.e.$有定义的广义实函数，$E\in\mathbf{S}$，若$f\chi_E$的积分存在(可积)，则称f在E上积分存在(可积)，且规定f在E上的积分为

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu.$$

可以证明f在E上的积分就是将f看作为子空间$(E, E\cap\mathbf{S}, \mu)$上的广义实函数的积分。

设$E, F\in\mathbf{S}, E\subset F$，又$f$是可测函数，由引理4.3知

$$\int_E f^+ d\mu \leqslant \int_F f^+ d\mu \text{ ; } \int_E f^- d\mu \leqslant \int_F f^- d\mu,$$

从而若f在F上的积分存在(可积)，则f在E上的积分亦存在(可积).特别地若f在$(X, \mathbf{S}, \mu)$上积分存在(可积)，则f在任一可测集E上的积分均存在(可积)。

§2 积 分 的 性 质

本节中所考虑的函数均是定义在同一测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的广义实函数。

定理4.1 设f是广义实函数，又$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)=0$，则$\int_E f d\mu = 0$。

证明 易知$f\chi_E = 0$，$a.e.$，而X上恒等于0的函数是可测的，且其积分为零。定理证完。

定理4.2 设f和g积分存在，且$f\geqslant g$, $a.e.$则

$$\int f d\mu \geqslant \int g d\mu.$$

证明 不妨设f和g是可测函数且$f\geqslant g$，故

$$f^+\geqslant g^+;\quad f^-\leqslant g^-.$$

由引理4.3我们有

$$\int f^+ d\mu\geqslant\int g^+ d\mu\ ;\quad \int f^- d\mu\leqslant\int g^- d\mu.$$

因f和g积分存在，故

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\geqslant\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu.$$

定理证完。

定理4.3 若f可积，则f $a.e.$有限。

证明 不妨设f可测，令$E_1=\{x: f(x)=+\infty\}$，$E_2=\{x: f(x)=-\infty\}$.若E_1和E_2中有一个的测度为正，例如$\mu(E_1)>0$，那么由定理4.2，对一切自然数n，我们有

$$\int f^+ d\mu\geqslant\int_{E_1} f^+ d\mu\geqslant\int_{E_1} n d\mu = n\mu(E_1),$$

令$n\to\infty$得$\int f^+ d\mu=+\infty$，这与f可积的假设矛盾.故E_1和E_2的测度均为0，从而f $a.e.$有限。定理证完。

定理4.4 若f为非负广义实函数，则$\int f d\mu=0$的充要条件为$f=0$, $a.e.$.

证明 充分性显然，往证必要性，不妨设f非负可测，令

$$E=\{x:f(x)>0\};E_n=\{x:f(x)>\frac{1}{n}\},$$

易见$E_n\uparrow E$，由定理4.2，我们有

$$0\leqslant\frac{1}{n}\mu(E_n)\leqslant\int_{E_n}fd\mu\leqslant\int fd\mu=0,$$

故$\mu(E_n)=0, n=1,2,\cdots$，由测度的下连续性得

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0.$$

因此$f=0, a.e.$，定理证完。

推论 若f为正的广义实函数，则$\int fd\mu>0$。

证明 若$\int fd\mu=0$，那么由定理4.4我们有$f=0, a.e.$这与假设$f>0$矛盾。

定理4.5 设f可测，则f可积的充要条件为$|f|$可积。

证明 若f可积，则f^+和f^-可积，因

$$|f|=f^++f^-,$$

由引理4.3立即得出$|f|$的可积性。反之若$|f|$可积，由

$$f^+\leqslant|f| \quad 及 f^-\leqslant|f|,$$

并利用定理4.2得

$$\int f^+d\mu\leqslant\int|f|d\mu;\quad \int f^-d\mu\leqslant\int|f|d\mu,$$

故f^+和f^-可积，从而f可积。定理证完。

定理4.6 若f积分存在，则

$$\left|\int fd\mu\right|\leqslant\int|f|d\mu.$$

证明 不妨设f可测，由引理4.3我们有

$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int f^{+} d\mu + \int f^{-} d\mu = \int |f| \, d\mu$$

定理证完。

定理4.7 设f积分存在，c是实数则cf积分亦存在且

$$\int cf d\mu = c\int f d\mu.$$

证明 当$c=0$时，定理显然成立。今设$c>0$，容易看出，当f是非负简单函数时定理成立。设f是非负可测函数，取非负简单函数序列$\{f_n\}$，使$f_n \uparrow f$，根据非负可测函数的积分定义，我们有

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to\infty}\int cf_n d\mu = \lim_{n\to\infty} c\int f_n d\mu = c\int f d\mu.$$

现设f积分存在，不妨设f可测由等式

$$(cf)^{+} = cf^{+}; \quad (cf)^{-} = cf^{-},$$

我们有

$$\int (cf)^{+} d\mu = \int cf^{+} d\mu = c\int f^{+} d\mu,$$

$$\int (cf)^{-} d\mu = \int cf^{-} d\mu = c\int f^{-} d\mu,$$

从而

$$\int cf d\mu = \int (cf)^{+} d\mu - \int (cf)^{-} d\mu = c\left(\int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu\right)$$

$$= c\int f d\mu.$$

最后设$c<0$。首先设$c=-1$，则因

$$(-f)^{+} = f^{-}; \quad (-f)^{-} = f^{+},$$

所以

$$\int -f d\mu = \int (-f)^{+} d\mu - \int (-f)^{-} d\mu = -\int f d\mu,$$

因此当$c=-1$时定理成立。若c是任意负实数，我们有

$$\int cf d\mu = \int -|c| f d\mu = -\int |c| f d\mu$$

$$= -|c| \int f d\mu = c \int f d\mu,$$

所以当$c<0$时定理亦成立。定理证完。

定理4.8 设f是广义实函数，$F_1, F_2 \in \mathbf{S}$且$F_1 \cap F_2 = \phi$，则

$$\int_{F_1 \cup F_2} f d\mu = \int_{F_1} f d\mu + \int_{F_2} f d\mu, \tag{4.4}$$

上式的意义是：当等号之一边有意义，另一边也有意义而且相等。

证明 先设f是非负可测函数，由引理4.3我们有

$$\int_{F_1 \cup F_2} f d\mu = \int f \chi_{F_1 \cup F_2} d\mu$$

$$= \int (f\chi_{F_1} + f\chi_{F_2}) d\mu = \int f\chi_{F_1} d\mu + \int f\chi_{F_2} d\mu$$

$$= \int_{F_1} f d\mu + \int_{F_2} f d\mu.$$

对于一般情形，不妨设f为可测函数，由下列等式

$$\int_{F_1 \cup F_2} f d\mu = \int_{F_1 \cup F_2} f^{+} d\mu - \int_{F_1 \cup F_2} f^{-} d\mu$$

$$= \int_{F_1} f^{+} d\mu + \int_{F_2} f^{+} d\mu - \int_{F_1} f^{-} d\mu - \int_{F_2} f^{-} d\mu$$

$$=\int_{F_1} f d\mu+\int_{F_2} f d\mu$$

可知定理成立。而这些等式的真确性由下列推理而得：

$\int_{F_1\cup F_2} f d\mu$ 存在 $\Longleftrightarrow \int_{F_1\cup F_2} f^+ d\mu$ 或 $\int_{F_1\cup F_2} f^- d\mu$ 为有限实数 $\Longleftrightarrow \int_{F_1} f^+ d\mu$ 及 $\int_{F_2} f^+ d\mu$ 同时是有限实数或 $\int_{F_1} f^- d\mu$ 及 $\int_{F_2} f^- d\mu$ 同时是有限实数 $\Longleftrightarrow \int_{F_1} f d\mu$ 与 $\int_{F_2} f d\mu$ 均存在且 $\int_{F_1} f d\mu+\int_{F_2} f d\mu$ 有意义。定理证完。

推论 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是两两不相交可测集，f 是广义实函数，那么

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i} f d\mu=\sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} f d\mu,$$

上述等式之意义是：当等号之一边有意义时，另一边也有意义且相等。

定理4.9 设 $\int f d\mu$ 与 $\int g d\mu$ 的积分存在且 $\int f d\mu+\int g d\mu$ 有意义，那么 $f+g$ 的积分亦存在且

$$\int(f+g) d\mu=\int f d\mu+\int g d\mu.$$

证明 不妨设 f, g 是可测函数，令

$$A=\{x: f(x) g(x) \geqslant 0\},$$

先在 A 上考虑，由引理4.3我们有

$$\int_A(f+g) d\mu=\int_A(f+g)^+ d\mu-\int_A(f+g)^- d\mu$$

$$=\int_A\left(f^{+}+g^{+}\right) d\mu-\int_A\left(f^{-}+g^{-}\right) d\mu$$

$$=\int_A f^+d\mu+\int_A g^+d\mu-\left(\int_A f^-d\mu+\int_A g^-d\mu\right)$$

$$=\int_A fd\mu+\int_A gd\mu.$$

上面推导的合理性是根据：因为$\int fd\mu+\int gd\mu$有意义，所以$\int_A fd\mu+\int_A gd\mu$也有意义，那末当$\int_A f^+d\mu$与$\int_A g^+d\mu$中有一个是$+\infty$时，则$\int_A f^-d\mu$与$\int_A g^-d\mu$便为有限实数，从而和数

$$\int_A f^+d\mu+\int_A g^+d\mu-\int_A f^-d\mu-\int_A g^-d\mu$$

有意义，类似地可讨论$\int_A f^-d\mu$与$\int_A g^-d\mu$中有一个是$+\infty$之情形。

现在对A'来讨论。令

$E_1=\{x:f(x)>0,\ g(x)<0,\ (f+g)(x)>0\}$；

$E_2=\{x:f(x)>0,\ g(x)<0,\ (f+g)(x)\leq 0\}$；

$E_3=\{x:f(x)<0,\ g(x)>0,(f+g)(x)>0\}$；

$E_4=\{x:f(x)<0,\ g(x)>0,\ (f+g)(x)\leq 0\}$，

易知$A'=\bigcup_{i=1}^{4}E_i$且$E_i\cap E_j=\phi$当$i\neq j$，由于对称的原故，只需在E_1,E_2上能证明定理真确，那么对E_3，E_4也就同样成立了。

当$x\in E_1$时，$|g(x)|\neq+\infty$，故由引理4.3有

$$\int_{E_1}fd\mu=\int_{E_1}[(f+g)+(-g)]d\mu=\int_{E_1}(f+g)d\mu+\int_{E_1}(-g)d\mu. \tag{4.5}$$

现证$\int_{E_1}(-g)d\mu<+\infty$，假若不然，由(4.5)式知

$$\int_{E_1}fd\mu=+\infty,$$

从而导出

$$\int fd\mu=+\infty\text{及}\int gd\mu=-\infty,$$

这就使$\int fd\mu+\int gd\mu$无意义，这与原设矛盾，故此应有$\int_{E_1}(-g)d\mu<+\infty$。在(4.5)式中两边减去$\int_{E_1}(-g)d\mu$得

$$\int_{E_1}(f+g)d\mu=\int_{E_1}fd\mu+\int_{E_1}gd\mu.$$

再考虑在E_2之情形。令

$$F=E_2\cap\{x:f(x)=+\infty\},$$

现证$\mu(F)=0$。假若不然，设$\mu(F)>0$，因为在E_2上$(f+g)(x)\leq 0$，故当$x\in F$时必有$g(x)=-\infty$，从而推出

$$\int_F fd\mu=+\infty\text{及}\int_F gd\mu=-\infty,$$

这就使$\int fd\mu+\int gd\mu$无意义，与原设矛盾。于是$f(x)$在E_2中$a.e.$有限。故由引理4.3有

$$\int_{E_2}(-g)d\mu=\int_{E_2}[(-g-f)+f]d\mu$$

$$=\int_{E_2}(-g-f)d\mu+\int_{E_2}fd\mu,$$

与在E_1之情形的同样推理知$\int_{E_2}fd\mu<+\infty$，从而由移项及消

去负号后得

$$\int_{E_2}(f+g)d\mu=\int_{E_2}fd\mu+\int_{E_2}gd\mu.$$

最后由$\int fd\mu+\int gd\mu$有意义，从定理4.8推论得

$$\int(f+g)d\mu=\int_A(f+g)d\mu+\sum_{i=1}^{4}\int_{E_i}(f+g)d\mu$$

$$=\int_A fd\mu+\sum_{i=1}^{4}\int_{E_i}fd\mu+\int_A gd\mu+\sum_{i=1}^{4}\int_{E_i}gd\mu$$

$$=\int fd\mu+\int gd\mu.$$

定理证完。

推论 设g是可积函数，f是可测函数且$f\geq g$, $a.e.$，那么f的积分存在。

证明 因g是可积函数，由定理4.3，g. $a.e.$有限故

$$f=(f-g)+g \qquad a.e.,$$

因$f-g$ $a.e.$非负可测，故$\int(f-g)d\mu$存在，由假设知

$$\int(f-g)d\mu+\int gd\mu$$

有意义，因而由定理4.9知$\int fd\mu$存在。证完。

§3 积分号下取极限

本节我们介绍积分号下取极限的几个定理。

定理4.10（单调收敛定理）设$\{f_n\}$为非负可测函数的递增序列且$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu. \tag{4.6}$$

证明 不妨设$f_n \uparrow f$，因$\{f_n\}$是非负可测函数序列，由定理3.4知，f亦是非负可测函数。当$\{f_n\}$为非负简单函数序列时，(4.6)不外是积分的定义。现讨论一般情形，即$\{f_n\}$为非负可测函数序列，对每一自然数k，取非负简单函数序列$\{f_{kn}\}$使$f_{kn}\uparrow f_k(n\to\infty)$。现利用$\{f_{kn}\}$构造函数序列$\{g_n\}$如下：

$$g_n = \sup_{k\leq n} f_{kn} \qquad n=1,2,\cdots,$$

那么每一个函数g_n是非负简单函数且

1)序列$\{g_n\}$是递增的，

2)$g_n\to f$，

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$。

第1)点是显然的。往证2)和3)，注意对$k\leq n$有

$$f_{kn}\leq g_n\leq f_n, \tag{4.7}$$

所以

$$\int_A f_{kn} d\mu\leq \int_A g_n d\mu\leq\int_A f_n d\mu, \tag{4.8}$$

令$n\to\infty$，(4.7)和(4.8)两式分别成为

$$f_k\leq \lim_{n\to\infty} g_n\leq f, \tag{4.9}$$

$$\int_A f_k d\mu\leq \lim_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu\leq \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu, \tag{4.10}$$

再令$k\to\infty$，(4.9)和(4.10)两式分别成为

$$f \leq \lim_{n\to\infty} g_n \leq f,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu,$$

这便证明了2)和3)。由于$\{g_n\}$是非负简单函数序列，并注意到1)和2)，根据积分定义就有

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu = \int f d\mu,$$

联系到3)便得出(4.6)式。定理证完。

推论1 设$\{f_n\}$是非正可测函数列，且$f_n \downarrow f$ $a.e.$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$。

证明 对$\{-f_n\}$利用定理4.10即得。

推论2 设$\{f_n\}$是可测函数列，且$f_n \uparrow f$ $a.e.$ 又$f_n \geq g$ $a.e.$ 对每一自然n成立，其中g是可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu .$$

证明 不妨设$f_n \uparrow f$，$f_n \geq g$对每一自然数n成立，且g处处有限。由定理4.9推论知$\int f_n d\mu$存在。因$f_n \uparrow f$故$f_n - g \uparrow f - g$，而$\{f_n - g\}$是非负可测函数列，由定理4.10得

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n - g) d\mu = \int (f - g) d\mu ,$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu - \int g\, d\mu = \int f\, d\mu - \int g d\mu.$$

因$\int g d\mu$是有限实数，故在上式两边消去$\int g d\mu$即得推论 2 的结论。证完。

推论3 设$\{f_n\}$是非负可测函数序列，则

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu .$$

证明 令

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad n = 1, 2, \cdots,$$

那么$\{g_n\}$是非负可测函数序列且$g_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$。由定理4.10及引理4.3我们有

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu .$$

推论证完。

推论4 设$\{f_n\}$是可测函数列且$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ d\mu < +\infty$（或$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^- d\mu < +\infty$），则

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu .$$

证明 由推论 3 得

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n^+ d\mu \ ;$$

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} f_n^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n^- d\mu \ ,$$

由假设知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^+$可积，因而$a.e.$有限，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n^+ - f_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^- \ a.e..$$

这样由定理4.9,我们有

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^-\right)d\mu$$

$$= \int\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ d\mu - \int\sum_{n=1}^{\infty} f_n^- d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n^+ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n^- d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int(f_n^+ - f_n^-)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu \ .$$

推论证完。

将上面定理4.10推论 2 中的条件“$\{f_n\}$是递增列”除去，便可得到著名的法都定理。

定理4.11(法都定理) 设$\{f_n\}$为可测函数列，g是可积函数，且对每一自然数n,均有$f_n \geqslant g, a.e.$,那么$\int \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$

存在且

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu .$$

证明 由f_n的可测性得出$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$的可测性，因对每一自然$n$，$f_n \geqslant g$，a.e.，故$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \geqslant g$，a.e.，由定理4.9推论知，$f_n$及$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$的积分存在。对每一自然数$n$，令$h_n = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$，则$h_n \uparrow$且$f_n \geqslant h_n \geqslant g$，a.e.，由定理4.9推论及定理4.2得

$$\int f_n d\mu \geqslant \int h_n d\mu .$$

两边取下极限并应用定理4.10推论2得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu \geqslant \varliminf_{n\to\infty}\int h_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int h_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} h_n d\mu$$

$$= \int \varliminf_{n\to\infty} h_n d\mu .$$

定理证完。

推论 设$\{f_n\}$为可测函数列，g为可积函数且对每一自然数n，$f_n \leqslant g$，a.e.，那么$\int \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$存在且

$$\int \varlimsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int f_n d\mu .$$

证明 考虑函数列$\{-f_n\}$并应用法都定理即得。

定理4.12（控制收敛定理） 设$\{f_n\}$是可测函数列，g是可积函数，对每一自然数n，$|f_n| \leqslant g$，a.e.，又$f_n \xrightarrow{a.e.} f$，则f可

积且

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|\,d\mu=0.$$

特别地我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

证明 不妨设g是实函数，对每一自然数n，$|f_n|\leqslant g$，且$f_n\to f$。因f_n可测，故f亦可测且$|f|\leqslant g$，由此得出f亦是可积的。易见

$$0\leqslant|f_n-f|\leqslant 2g,$$

这样函数序列$\{\,|f_n-f|\,\}$满足法都定理及其推论的条件，故

$$\int\varliminf_{n\to\infty}|f_n-f|\,d\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int|f_n-f|\,d\mu\leqslant$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int|f_n-f|\,d\mu\leqslant\int\varlimsup_{n\to\infty}|f_n-f|\,d\mu\ .$$

因$f_n\to f$故$|f_n-f|\to 0$，由上式即得

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|\,d\mu=0\ .$$

因

$$\left|\int f_n d\mu-\int f d\mu\right|=\left|\int(f_n-f)\,d\mu\right|\leqslant\int|f_n-f|\,d\mu$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\int f d\mu.$$

定理证完。

§4 不定积分

设$(X,\mathbf{S},\mu)$是测度空间，f的积分存在，对于每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\nu(E)=\int_E f d\mu$$

则集函数ν称为f的不定积分。

定理4.13 不定积分ν具有完全可加性，即若$\{E_n\}$是X中两两不相交的可测集序列，那么

$$\nu\{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n).$$

证明 令$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 先设f是非负可测函数，因

$$f\chi_E=\sum_{n=1}^{\infty}f\chi_{E_n},$$

注意$\{f\chi_{E_n}\}$为非负可测函数列，由定理4.10推论3，我们有

$$\nu(E)=\int f\chi_E d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int f\chi_{E_n}d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f d\mu$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n).$$

其次设f积分存在，不妨设f是可测的，由刚才已证的结果，我们有

$$\int_E f^+ d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+ d\mu;$$

$$\int_E f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^- d\mu.$$

因f积分存在，故上两式右边级数至少有一个是收敛的，从而

$$\nu(E) = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} (f^+ - f^-) d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

定理证完。

推论 设f是非负可测函数，则f的不定积分ν是可测空间$(X, \mathbf{S})$上的测度。

证明 显然。

定理4.14 （不定积分的绝对连续性） 若f在测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$上可积，则对任给的正数ε，存在$\delta > 0$使当$E \in \mathbf{S}$，$\mu(E) < \delta$时恒有

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

证明 用反证法，若定理不成立，则存在某个$\varepsilon > 0$，使对每一自然数n，都存在$E_n \in \mathbf{S}$满足

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \int_{E_n} |f| d\mu \geqslant \varepsilon.$$

令

$$\lambda(E) = \int_E |f| d\mu,$$

由定理4.13推论及f的可积性知，λ是$(X, \mathbf{S})$上的有限测度。

令 $E_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}E_k$，一方面

$$\mu(E_0)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\mu(E_k)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}},n=1,2,\cdots,$$

故$\mu(E_0)=0$。而另一方面

$$\lambda(E_0)=\lim_{n\to\infty}\lambda(\bigcup_{k\geq n}E_k)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\lambda(E_k)\geqslant\varepsilon,$$

由此导致了$|f|$在零测集上的积分不为零，这与定理4.1矛盾。定理证完。

定理4.15 设f是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的非负可测函数，令

$$\nu(E)=\int_E fd\mu$$

则对任意广义实函数g我们有

$$\int gd\nu=\int gfd\mu,$$

上述等式之意义是：当等号之一边有意义时，另一边也有意义且相等。

证明 由定理4.13推论知，ν是$(X,\mathbf{S})$上的测度，因此$(X,\mathbf{S},\nu)$是一个测度空间。

先设g是某个可测集E上的特征函数

$$g=\chi_E,\quad E\in\mathbf{S},$$

则

$$\int gd\nu=\nu(E)=\int_E fd\mu,$$

$$\int gfd\mu=\int\chi_E fd\mu=\int_E fd\mu,$$

故定理对g为特征函数时成立。由此易证当g是非负简单函数时仍成立。

其次设g是非负可测函数，取非负简单函数序列$\{g_n\}$使$g_n \uparrow g$，易知$g_n f \uparrow gf$，故由非负可测函数积分的定义及上面已证的结果我们有

$$\int gf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\nu = \int g d\nu,$$

故定理在g为非负可测函数时成立。

设g是可测函数，从关系式

$$(gf)^+ = g^+ f;\quad (gf)^- = g^- f,$$

我们有

$$\int (gf)^+ d\mu = \int g^+ f d\mu = \int g^+ d\nu;$$

$$\int (gf)^- d\mu = \int g^- f d\mu = \int g^- d\nu,$$

从而

$$\int g d\nu = \int g^+ d\nu - \int g^- d\nu = \int (gf)^+ d\mu - \int (gf)^- d\mu$$

$$= \int gf d\mu,$$

上述等式的意义是：当等式之一边有意义时，另一边也有意义且相等。

当g是广义实函数时，由广义实函数的积分定义知，定理的结论也是正确的。定理证完。

习 题

①设X_0为集X的子集，(X_0, S_0, μ_0)为测度空间，令$S =$

$\{E: E\subset X, X_0\cap E\in \mathbf{S}_0\}$，对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\mu(E)=\mu_0(X_0\cap E),$$

证明$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间。

②设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，$X_0\subset X$，μ_0是$(X_0, X_0\cap\mathbf{S})$上的测度，对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\mu(E)=\mu_0(X_0\cap E),$$

证明$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间。

③设μ_n，$n=1,2,\cdots$为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度序列。

i)对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E),$$

证明μ是$(X,\mathbf{S})$上的测度。

ii) 若对每一$E\in\mathbf{S}$，$\mu_1(E)\leq\mu_2(E)\leq\cdots$，令

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(E)$$

证明μ为$(X,\mathbf{S})$上的测度。

④设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，$\{X_n\}$为两两不相交的可测集序列且$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，又对每一自然数$n$，$(X_n, E_n\cap\mathbf{S},\mu_n)$为测度空间，对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(X_n\cap E),$$

证明μ为$(X,\mathbf{S})$上的测度。特别地当μ_n σ有限，$n=1,2,\cdots$，那么μ也σ有限。

⑤设$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间，$X_0\subset X$，$X_0\in\mathbf{S}$，f为X上的广义实函数。对每一$E\in X_0\cap\mathbf{S}$，令

$$\mu_0(E)=\mu(E),$$

又记$f_0(x)=f(x)$，$x\in X_0$。证明f_0在$(X_0,X_0\cap\mathbf{S},\mu_0)$上的积分等于$\int f\chi_{X_0}d\mu$。(两者之一有意义，则另者亦有意义且相等。)

⑥设$\{\mu_n\}$为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度序列，f为X上的广义实函数。记 $\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$，证明

$$\int fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int fd\mu_n,$$

上式一边存在则另一边亦存在且相等。

⑦证明有限测度空间上的有界可测函数f可积。

⑧设$\{\mu_n\}$为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的有限测度序列，μ为有限测度，且对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(E)=\mu(E),$$

f为有界可测函数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

⑨设f为可测空间$(X,\mathbf{S})$上的可测函数，$x_0\in X$，μ为$(X,\mathbf{S})$上的测度，满足：对每一$E\in\mathbf{S}$，

$$\mu(E)=\begin{cases}1 & x_0\in E\\ 0 & x_0\bar{\in} E,\end{cases}$$

证明$\int fd\mu=f(x_0)$。

⑩设X为有限集，$\mathbf{S}$为X的所有子集组成的σ代数，μ为$\mathbf{S}$上的有限测度，则$(X,\mathbf{S},\mu)$上任何可测实函数是可积的简单函数，对这种函数来说．积分的一切性质都化为有限和的性质。

⑪设X是全体自然数所组成的集，$\mathbf{S}$为X的全体子集组成的σ代数，μ为$\mathbf{S}$上的测度，f为$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数。证明

i)f积分存在$\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f^{+}(n)\mu(n)$和$\sum_{n=1}^{\infty}f^{-}(n)\mu(n)$至少有一收敛，上述两条件有一成立时，有

$$\int f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\mu(n).$$

ii) f可积$\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\mu(n)$绝对收敛。

⑫设$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间，f为可测函数，

i)若对每一$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\int_E f d\mu\geq 0,$$

证明$f\geq 0$, $a.e.$,

ii)若对每一$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\int_E f d\mu=0,$$

证明$f=0$, $a.e.$,

⑬设$(X,\mathbf{S},\mu)$为σ有限测度空间，f，g积分存在，且对每一$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\int_E f d\mu=\int_E g d\mu,$$

则$f=g$, a.e..

⑭设$\{f_n\}$为可积函数列，又$f_n \xrightarrow{a.e.} f$，试问f可积吗？考虑例子，X为全体自然数所成的集，$\mathbf{S}$为X的所有子集组成的σ代数，$\mu(E)$为E中点的个数。在上述测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$中考察函数列$\{f_n\}$和f如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{当}1\leq x\leq n, x\in X\\ 0 & \text{当}x>n, x\in X,\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\in X.$$

⑮若$\mu(X)<+\infty$，f_n可积且f_n一致收敛于f，证明$f_n \xrightarrow{m} f$，若$\mu(X)=+\infty$，结论未必成立。考察例子，$(X,\mathbf{S},\mu)=([0,+\infty),[0,+\infty)\cap\mathbf{B},\mu)$，$f=0$，$f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n)}$.

⑯设$(X,\mathbf{S},\mu)$为有限测度空间，f为可测函数，证明下述三命题

i)f可积；

ii)任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$，$\mu(E)<\delta$有

$$\int_E |f|\,d\mu<\varepsilon;$$

iii)任给$\varepsilon>0$，存在自然数k，使

$$\int_{\{x:\,|f(x)|\geq k\}}|f|\,d\mu<\varepsilon,$$

存在下述关系：i)$\Longleftrightarrow$iii)；i)$\Rightarrow$ii)。

第五章 可测函数列的几种收敛性

§1 可测函数列的几种收敛性

函数序列的两种古典收敛概念——处处收敛及一致收敛，读者是熟知的，这里我们不再重述。为了概率论的需要，必须将古典的收敛概念推广，本章各节我们将讨论可测函数列的几种常用的收敛意义及其主要结果。

设$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间，在本节中若不特别声明，所有的函数例如f,f_n均为$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测实函数(即不取无穷值的广义实函数)。

设$\{f_n\}$为可测实函数列，f是可测实函数。如果存在可测集E，使$\mu(E)=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad 凡x\in X\setminus E,$$

则称$\{f_n\}$几乎处处收敛于f，记作$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$〔$a.e.$〕或$f_n\xrightarrow{a.e.}f$。

如果对任意给定的$\delta>0$，存在$F\in\mathbf{S},\mu(F)<\delta$，使$\{f_n\}$在$X\setminus F$上一致收敛于$f$，即对任意给定的$\varepsilon>0$，恒存在自然数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n\geq N$时，不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对所有$x\in F'$均成立，则称$\{f_n\}$几乎一致收敛于f，记为

$\lim_{n\to\infty} f_n = f[a.un.]$或 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$。

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}=0.$$

则称$\{f_n\}$依测度收敛于f，记作 $\lim_{n\to\infty} f_n = f[\mu]$ 或$f_n \xrightarrow{\mu} f$。

如果$\int|f|d\mu<+\infty$，$\int|f_n|d\mu<+\infty$，$n=1,2,\cdots$，

且

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|d\mu=0,$$

则称$\{f_n\}$平均收敛，记作$\lim_{n\to\infty} f_n = f[m.]$或 $f_n \xrightarrow{m} f$。

若可测实函数列$\{f_n\}$满足

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}|f_n-f_m|=0[a.e.](\text{或}[a.un.]\text{或}[\mu]\text{或}[m.]),$$

则称$\{f_n\}$基本$[a.e.]$收敛（或对应地基本$[a.un.]$收敛，或基本$[\mu]$收敛或基本$[m.]$收敛）。

注：设$\{f_n\}$和f分别为测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的实函数列及实函数（不一定可测），$\{f_n\}$几乎处处收敛于f及$\{f_n\}$几乎一致收敛于f的概念，可按上面所述同样定义。

例1 设$(X,\mathbf{S},\mu)=([0,1],[0,1]\cap\widetilde{\mathbf{B}},L)$，其中$\widetilde{\mathbf{B}}$为实数空间$R$中的勒贝格可测集，$L$为勒贝格测度，又令

$$f_n(x)=n\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\qquad x\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots,$$

$$f(x)=0 \qquad\qquad x\in[0,1],$$

对任意固定$x\in(0,1]$，易知当n充分大时，$f_n(x)=0$，又$\mu(\{0\})=0$，故f_n在$[0,1]$上几乎处处收敛于f。任给$\delta>0$，及$\varepsilon>0$，令$F=[0,\frac{\delta}{2})$，则$\mu(F)<\delta$，易知当n充分大，不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对所有$x\in[\frac{\delta}{2}, 1]$均成立，故$f_n\xrightarrow{a.un.}f$。

又对任给$0<\varepsilon<1$，我们有$\mu(\{x: |f_n-f|\geq\varepsilon\})=\frac{1}{n}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(x: |f_n-f|\geq\varepsilon\}=0$，亦即$f_n\xrightarrow{\mu}f$。此外，由等式

$$\int_X |f_n-f|\,d\mu=\int_{[0,\frac{1}{n}]} n\,d\mu=1$$

知，$\{f_n\}$不平均收敛于f。

例2 设$(X,S,\mu)=(R^+, R^+\cap\widetilde{B}, L)$，其中$R^+=[0,+\infty)$，又令$f_n=\chi_{[n,\infty)}$，$n=1,2,\cdots$及$f=0$。易知$\{f_n\}$在$R^+$上处处收敛于$f$，但$\{f_n\}$不几乎一致收敛于$f$，此外由等式

$$\mu(\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{2})=\mu\{x: |f_n(x)|\geq\frac{1}{2}\}=+\infty$$

知，$\{f_n\}$不依测度收敛于f。又由等式

$$\int|f_n-f|\,d\mu=\int_{[n,\infty)}d\mu=\mu([n,\infty))=+\infty$$

知，$\{f_n\}$不平均收敛于f。

例3 设 $(X,\mathbf{S},\mu)=([0,1],[0,1]\cap\widetilde{\mathbf{B}},L)$，集序列 $\{E_n\}$ 为一区间序列且 $\mu(\{E_n\})=\frac{1}{n}$. 将区间序列 $\{E_n\}$ 放在区间[0,1]上，使其一个接一个，遇到[0,1]的端点则重叠地返回(参见图(一))。对每一自然数n，令

$$f_n=\chi_{E_n};\quad f=0,$$

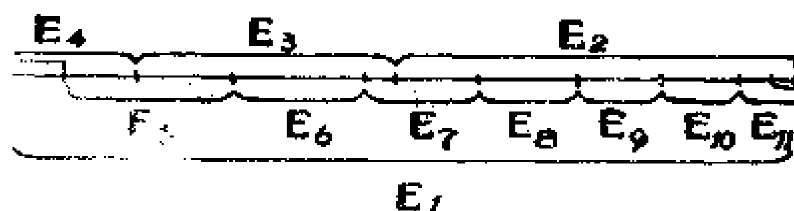
因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$，对任意固定的 $x\in[0,1]$，必存在无穷个 E_n 覆盖x，对这些n，我们有 $f_n(x)=1$，另一方面又存在无穷个 E_n 不覆盖x，对这些 n 我们有 $f_n(x)=0$，因此 $\{f_n(x)\}$ 不收敛，从而 $\{f_n\}$ 在X上处处不收敛，更有 $\{f_n\}$ 不几乎处处收敛于f和 $\{f_n\}$ 不几乎一致收敛于f. 任给 $0<\varepsilon<1$，由等式

$$\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=\mu(E_n)=\frac{1}{n},$$

知 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 又由等式

$$\int|f_n-f|d\mu=\int_{E_n}d\mu=\mu(E_n)=\frac{1}{n}$$

知 $f_n\xrightarrow{m}f$.



图(一)

引理5.1 设$\{f_n\}$为实函数列，f是实函数，那么

$$\{x: f_n(x)\to f(x)\}$$

$$=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|<\varepsilon\} \tag{5.1}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}, \tag{5.2}$$

$$\{x: f_n(x)\not\to f(x)\}$$

$$=\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\} \tag{5.3}$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}, \tag{5.4}$$

$$\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\to 0\}$$

$$=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f_{n+\nu}(x)|<\varepsilon\} \tag{5.5}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f_{n+\nu}(x)|<\frac{1}{k}\}, \tag{5.6}$$

$$\{x: |f_n(x)-f_m(x)\not\to 0\}$$

$$=\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f_{n+\nu}(x)|\geqslant\varepsilon\} \tag{5.7}$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f_{n+\nu}(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}. \tag{5.8}$$

证明 由数学分析的知识易知：$f_n(x)\to f(x) \Longleftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 n，当 $i\geqslant n$ 时，均有 $|f_i(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow$ 对任给自然数 k，存在自然数 n，当 $i\geqslant n$ 时，均有 $|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$，从而(5.1)和(5.2)式成立。运用第一章集运算的De Morgan公式，由(5.1)和(5.2)式立即得出(5.3)和(5.4)式。(5.5)—(5.8)式可类似于(5.1)—(5.4)得到。引理证完。

引理5.2 设 $\{f_n\}$ 为可测实函数列，f 为可测实函数。则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，恒有

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0.$$

更设测度空间 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 为有限测度空间，则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0 .$$

证明 由(5.2)式我们有

$$\{x:f_n(x)\nrightarrow f(x)\}$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$$

因 f_n 和 f 均为可测函数，故 $\left\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}$ 为可测集，从而 $\{x:f_n(x)\nrightarrow f(x)\}$ 为可测集。由测度的单调性和完全半可加性，我们有：

$$f_n\xrightarrow{a.e.}f\Longleftrightarrow\mu(\{x:f_n(x)\nrightarrow f(x)\})=0$$

$$\Longleftrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left\{x: |f_i(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right)=0,$$

$$k=1,2,\cdots \tag{5.9}$$

由(5.9)式立即得出引理5.2的第一个结论。更设$\mu(X)<+\infty$，由测度的上连续性，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\left\{x: |f_i(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right)$$

$$=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left\{x: |f_i(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}\right), \tag{5.10}$$

由(5.9)及(5.10)两式立即得出引理5.2的第二个结论。引理证完。

引理5.3 设$\{f_n\}$为可测实函数列，$\{f\}$为可测实函数，则$f_n \xrightarrow{a\cdot un\cdot} f$的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right)=0.$$

证明 必要性：设$f_n \xrightarrow{a\cdot un\cdot} f$，那么任给$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在$F\in\mathbf{S}$，$\mu(F)<\delta$及存在正整数$N=N(\varepsilon,\delta)$，使当$n>N$不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对所有$x\in F'$均成立。因此当$i>N$时我们有

$$\{x: |f_i(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\}\subset F,$$

从而当$n>N$时

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\subset F,$$

由测度的单调性我们有

$$\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\mu(F)<\delta,$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}\{x: |f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$。

充分性：任给$\delta>0$，对每一自然数k，由充分性的假设，存在自然数n_k，使

$$\mu(\bigcup_{n=n_k}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\})<\frac{\delta}{2^k}.$$

令$F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=n_k}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}$，则$F$是可测集，由测度的完全半可加性得

$$\mu(F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\bigcup_{n=n_k}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\})$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}<\delta,$$

由集运算的De Morgan公式，$F'=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=n_k}^{\infty}\{x: |f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\}$，因而对每一自然数$k$，存在$n_k$，当$n\geqslant n_k$时不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$$

对所有$x\in F'$均成立，这便证得$f_n\xrightarrow{a.un.}f$.引理证完。

定理5.1 设$\{f_n\}$及f分别为实函数序列及实函数，又$f_n\xrightarrow{a.un.}f$，则$f_n\xrightarrow{a.e.}f$。

证明 对每一自然数k，令F_k为具有如下条件之可测集，1) $\mu(F_k)\leqslant\frac{1}{k}$，2)在$X\backslash F_k$上$f_n$一致收敛于$f$，又令$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$，那么从

$$\mu(F)\leqslant\mu(F_k)<\frac{1}{k},\ k=1,2,\cdots,$$

知$\mu(F)=0$，但在F'上$\{f_n\}$处处收敛于f，从而$\{f_n\}$几乎处处收敛于f.定理证完。

定理5.2 设$\{f_n\}$及f分别为可测实函数序列及可测实函数，又$f_n\xrightarrow{a.un.}f$，则$f_n\xrightarrow{\mu}f$。

证明 因$f_n\xrightarrow{a.un.}f$，由引理5.3我们有：任给$\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right)=0, \qquad (5.11)$$

显然有

$$\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}\right), \qquad (5.12)$$

由(5.11)和(5.12)得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0,$$

即$f_n\xrightarrow{\mu}f$.定理证完。

定理5.3 设$\{f_n\}$及f分别为可测可积实函数序列及可测可积实函数，又$f_n\xrightarrow{m}f$，则$f_n\xrightarrow{\mu}f$.

证明 设ε是给定的正数，记$A_n=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$从不等式

$$\varepsilon\mu(A_n)\leqslant\int_{A_n}|f_n-f|d\mu\leqslant\int|f_n-f|d\mu$$

及$f_n\xrightarrow{m}f$得$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$,这就证明了$f_n\xrightarrow{\mu}f$.定理证完。

由本节例2知，可测实函数列$\{f_n\}$ $a.e.$收敛但它未必$a.un.$收敛。当$(X,\mathbf{S},\mu)$为有限测度空间时，那么$\{f_n\}$ $a.e.$收敛的充要条件为$\{f_n\}$ $a.un.$收敛，这可由下述著名的叶果洛夫定理得出。

定理5.4 设$\{f_n\}$和f分别是有限测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测实函数列和可测实函数，又$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则$f_n\xrightarrow{a.un.}f$.

证明 因$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，由引理5.2,对任给$\varepsilon>0$均有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0,\tag{5.13}$$

再由(5.13)式及引理5.3知，$f_n\xrightarrow{a.un.}f$.定理证完。

由本节例3知，即使在有限测度空间上，可测实函数列$\{f_n\}$依测度收敛，但它未必$a.un.$收敛。下述黎斯定理说

明依测度收敛的可测函数列，必存在子列$a.un.$收敛。

定理5.5 设$\{f_n\}$为有限可测函数列，f为有限可测函数。

1) 若$f_n \xrightarrow{\mu} f$，则$\{f_n\}$中存在着子列$\{f_{n_k}\}$使$f_{n_k} \xrightarrow{a.un.} f$。

2) 若$\{f_n\}$基本[μ]收敛，则$\{f_n\}$中存在着子列$\{f_{n_k}\}$基本[$a.un.$]收敛。

证明 首先证明1)。由$\{f_n\}$依测度收敛于f的定义，对每一自然数k，存在自然数m_k，使当$n \geqslant m_k$有

$$\mu(\{x: |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}) > \frac{1}{2^k}.$$

现令$n_1 = m_1, n_2 = \max\{n_1+1, m_2\}$，$n_3 = \max\{n_2+1, m_3\}$等等，并应用数学归纳法得到自然数列$\{n_k\}$满足$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$使

$$\mu(\{x: |f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}) < \frac{1}{2^k}.$$

设$\varepsilon > 0$和$\delta > 0$是任给的实数，取自然数i及k_0使$\frac{1}{2^{i-1}} < \delta$及$\frac{1}{k_0} < \varepsilon$，令

$$F_k = \{x: |f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\},$$

$$F = \bigcup_{k=i}^{\infty} F_k,$$

那末

$$\mu(F) \leqslant \sum_{k=i}^{\infty} \mu(F_k) \leqslant \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta.$$

而另一方面，对于$x\in F'$，当$k>max(i,k_0)$，有

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}<\varepsilon,$$

这便证明了$f_{n_k}\xrightarrow{a\cdot un\cdot}f$。

往证2)。由$\{f_n\}$基本[μ]的定义，类似于1)的证明，对于每一自然数k，存在n_k，满足$n_1<n_2<n_3<\cdots$使当$n\geqslant n_k$，$m\geqslant n_k$有

$$\mu(\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\})<\frac{1}{2^k},$$

特别地我们有

$$\mu(\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\})<\frac{1}{2^k}.$$

设$\varepsilon>0$和$\delta>0$是任给的实数，取自然数i及k_0使$\frac{1}{2^{i-1}}<\delta$及$\frac{1}{2^{k_0-1}}<\varepsilon$，令

$$F_k=\{x:|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\},$$

$$F=\bigcup_{k=i}^{\infty}F_k,$$

那么$\mu(F)\leqslant\frac{1}{2^{i-1}}<\delta$。而另一方面，对于$x\in F'$，当正整数$l$，$k$满足$l\geqslant k>\max(i,k_0)$，我们有

$$|f_{n_l}(x)-f_{n_k}(x)|<\sum_{m=k}^{\infty}|f_{n_{m+1}}-f_{n_m}|\leqslant\sum_{m=k}\frac{1}{2^m}$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon\ .$$

这便证明了 $\{f_{n_k}\}$ 基本〔$a,un,$〕收敛，

定理5.6 设 $\{f_n\}$ 为可测实函数列，f 和 g 为可测实函数，那么

1）若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 和 $f_n \xrightarrow{a.e.} g$ 则 $f = g, a.e.$；

2）若 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$ 和 $f_n \xrightarrow{a.un.} g$ 则 $f = g, a.e.$；

3）若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 和 $f_n \xrightarrow{\mu} g$ 则 $f = g, a.e.$；

4）若 $f_n \xrightarrow{m.} f$ 和 $f_n \xrightarrow{m.} g$ 则 $f = g, a.e.$.

证明 1)是显然的。2)由定理5.1及1)即得。3)由定理5.5及2)即得。4)由定理5.3及3)可得。定理证完。

由定理5.6知，若几乎处处相等的函数不加区别，那么上述四种收敛的极限是唯一的。

定理5.7 设 $\{f_n\}$ 为可测实函数列，$\{f_n\}$ $a.e.$收敛（或者$a.un.$收敛、μ收敛、$m.$收敛）于某个可测实函数f的充要条件是$\{f_n\}$基本〔$a.e.$〕（或者〔$a.un.$〕、〔μ〕、〔$m.$〕）收敛。

证明 先证$a.e.$收敛的情形。必要性由数学分析的熟知知识立即得出。充分性：若$\{f_n\}$基本〔$a.e.$〕收敛，那么存在可测集E，$\mu(E)=0$，使得对每一$x\in E'$及任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N(x,\varepsilon)$，当$n\geqslant N$，$m\geqslant N$，恒有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon. \tag{5.14}$$

由数学分析知，对每一$x\in E'$，$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$存在且为实数。对每一$x\in X$，令

$$g_m(x)=f_m(x)\chi_{E'}(x),\quad m=1,2,\cdots,$$

则 $\{g_m\}$ 为可测实函数列。令 $f=\lim\limits_{m\to\infty}g_m$，则 f 为可测实函数，且当 $x\in E'$ 时有

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}f_m(x). \tag{5.15}$$

在(5.14)中令 $m\to\infty$，注意(5.15)式我们有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

故 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$。

其次证明 $a.un.$ 收敛的情形。必要性是显然的，充分性：设 $\{f_n\}$ 基本〔$a.un.$〕收敛，类似于定理5.1可以证明此时 $\{f_n\}$ 亦基本〔$a.e.$〕收敛。从而存在可测实函数 f，使 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$。因此存在可测集 E，$\mu(E)=0$，使对每一 $x\in E'$ 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

由 $\{f_n\}$ 基本〔$a.un.$〕收敛，对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在可测集 F(不妨设 $E\subset F$)，$\mu(F)<\delta$，及正整数 $N(\varepsilon,\delta)$，当 $n\geq N$，$m\geq M$ 不等式

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$$

对所有 $x\in F'$ 均成立，上式中令 $m\to\infty$ 得

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,$$

因此 $f_n\xrightarrow{a.un.}f$。

再次证明 μ 收敛的情况。必要性从下式

$$\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\}\subset\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq \frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{x: |f_m(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$$

即得。充分性：设$\{f_n\}$基本$[\mu]$收敛，由定理5.5知，存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_k}\}$，使$\{f_{n_k}\}$基本$[a.un.]$收敛，由已证的$a.un.$收敛的情形知，存在可测实函数f，使$f_{n_k}\xrightarrow{a.un.}f(k\to\infty)$。由定理5.2知$f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f(k\to\infty)$。设$\varepsilon$是任给正数，考虑下式

$$\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\subset\{x: |f_n(x)-f_{n_k}(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{x: |f_{n_k}(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\},$$

由$\{f_n\}$基本$[\mu]$收敛，当n与n_k足够大时，上式右方第一项之测度可小于任意给定正数，再由$f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$，上式右方第二项之测度，当$n_k$足够大时亦可小于任给正数，这便证明了$f_n\xrightarrow{\mu}f$。

最后平均收敛的情形是本章§3 Lp空间完备性的特殊情形，这里我们不再证明。定理证完。

注：由定理5.7的证明中可知：若$\{f_n\}$为实函数列，$\{f_n\}$ $a.e.$收敛(或者$a.un.$收敛)于某个实函数f的充要条件是$\{f_n\}$基本$[a.e.]$(或者$[a.un.]$)收敛。

最后，我们将上述四种收敛推广到几乎处处有限广义实函数类上。

设$\{f_n\}$为$a.e.$有限广义实函数序列，f为$a.e.$有限广义实函数，如果存在可测集E，使$\mu(E)=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\qquad \text{凡}x\in E',$$

则称$\{f_n\}$几乎处处收敛于f，记作$f_n\xrightarrow{a.e.}f$。

如果对任意给定的$\delta>0$，存在$F\in\mathbf{S}$，$\mu(F)<\delta$（不妨设$[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|=+\infty\}\cup\{x:|f(x)|=+\infty\}]\subset F$），使$\{f_n\}$在$F'$上一致收敛于$f$，则称$\{f_n\}$几乎一致收敛于$f$，记作$f_n\xrightarrow{a.un.}f$。

设$\{f_n\}$为$a.e.$有限可测函数序列，f为$a.e.$有限可测函数，若存在可测实函数序列$\{g_n\}$和可测实函数g使

$$f_n=g_n, a.e.\ n=1,2,\cdots,\quad f=g\quad a.e.$$

且$g_n\xrightarrow{\mu}g$，则称$\{f_n\}$依测度收敛于f，记作$f_n\xrightarrow{\mu}f$。

若上述$\{g_n\}$和g满足$g_n\xrightarrow{m.}g$，则称$\{f_n\}$平均收敛于f，记作$f_n\xrightarrow{m.}f$。

对于$a.e.$有限可测函数列$\{f_n\}$基本$[a.e.]$（或$[a.un.]$，$[\mu]$，$[m.]$）收敛可类似地定义。

引理5.4 1）设f为$a.e.$有限可测函数，则存在可测实函数g使$f=g\quad a.e.$

2）设$\{f_n\}$和$\{g_n\}$为$a.e.$有限广义实函数列，f和g为$a.e.$有限广义实函数且

$$f=g, a.e.\text{和}f_n=g_n, a.e.\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$〔a.e.〕(或〔a.un.〕)$\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$〔a.e.〕(或〔a.un〕).

3)设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 为a.e.有限可测函数列，f和g为a.e.有限可测函数且

$$f=g\ \text{a.e.}\quad 和 f_n=g_n,\quad \text{a.e.}\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$〔$\mu$〕(或〔m.〕)$\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$〔$\mu$〕(或〔m.〕).

证明 1)令

$$g(x)=\begin{cases} f & x\in\{x:|f(x)|\neq+\infty\}\\ 0 & x\in\{x:|f(x)|=+\infty\},\end{cases}$$

因 $\{x:|f(x)|=+\infty\}\in S$，故$g$为可测实函数且$f=g$, a.e..

2)的证明是显然的.

3)对于平均收敛的情形，由等式

$$\int|f_n-f|d\mu=\int|g_n-g|d\mu,$$

立即得出引理的结论. 往证依测度收敛的情形.

若$f_n\xrightarrow{\mu}f$，那么存在可测实函数列$\{f'_n\}$及可测实函数f'，使

$$f_n=f'_n,\ \text{a.e.}\ n=1,2,\cdots,\ 和 f=g'\ \text{a.e.}\qquad(5.16)$$

且$f'_n\xrightarrow{\mu}f'$. 由假设及(5.16)式得

$$f'_n=g_n,\ \text{a.e.}\ n=1,2,\cdots 和 f'=g\ \text{a.e.},$$

从而$g_n\xrightarrow{\mu}g$. 同理可证若$g_n\xrightarrow{\mu}g$则$f_n\xrightarrow{\mu}f$. 引理证完.

利用引理5.4，我们可以将定理5.1—5.7推广到几乎处

处有限的广义实函数类上。作为例子，我们仅讨论定理5.1，5.2及5.7的推广。

定理5.1′ 设 $\{f_n\}$ 和 f 分别为 $a.e.$ 有限的广义实函数列及 $a.e.$ 有限的广义实函数。又 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$ 则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$。

证明 类似于引理5.4 1)的证明，可作实函数列 $\{g_n\}$ 和实函数 g，使

$$f_n = g_n \ a.e. \ n=1,2,\cdots \quad 和 f=g \ a.e. \ .$$

若 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$，那么由引理5.4 2)知 $g_n \xrightarrow{a.un.} g$，根据定理5.1，$g_n \xrightarrow{a.e.} g$，再利用引理5.4 2)得 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$。定理证完。

定理5.2′ 设 $\{f_n\}$ 和 f 分别为 $a.e.$ 有限的可测函数列和 $a.e.$ 有限的可测函数。又 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$ 则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。

证明 若 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$，由引理5.4 1)知，存在可测实函数列 $\{g_n\}$ 和可测实函数 g，使

$$f_n = g_n, \ a.e. \ n=1,2,\cdots \ 和 f=g \ a.e. \ .$$

再根据引理5.4 2)，$g_n \xrightarrow{a.un.} g$，由定理5.2得 $g_n \xrightarrow{\mu} g$，再利用引理5.4 3)得 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。定理证完。

定理5.7′ 设 $\{f_n\}$ 为 $a.e.$ 有限可测函数列，$\{f_n\}$ $a.e.$ 收敛(或 $a.un.$ 收敛或 μ 收敛或 $m.$ 收敛)于某个可测实函数的充要条件是 $\{f_n\}$ 基本〔$a.e.$〕(或〔$a.un.$〕或〔μ〕或〔$m.$〕) 收敛。

证明 仅就依测度收敛的充分性来证明，其余可类似证明。设 $\{f_n\}$ 基本〔μ〕收敛。由引理5.4 1)存在可测实函数

列 $\{g_n\}$ 使

$$f_n = g_n, \quad a.e. \quad n = 1, 2, \cdots.$$

类似于引理5.4 3)的证明，可以证明 $\{g_n\}$ 基本 $[\mu]$ 收敛，由定理5.7存在可测实函数f，使$g_n \xrightarrow{\mu} f$，再由引理5.4 3)得 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。定理证完。

§2 函数空间 Lp

若无特别声明，本节中字母p恒指大于或等于1的一个实数。

设f是$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的可测函数且满足$\int |f|^p d\mu < +\infty$，则称$f$是一个$p$次可积函数。全体$p$次可积函数记作$L_p$或$L_p(X, \mathbf{S}, \mu)$当$p = 1$时，采用记号$L = L_1 = L_1(X, \mathbf{S}, \mu)$。由定理4.3知，若$f \in L_p$，则$f$ $a.e.$有限，由引理5.4 1)知存在可测实函数g，使$f = g$ $a.e.$，根据引理4.4，我们有$\int |f|^p d\mu = \int |g|^p d\mu$。故此今后若$f \in L_p$，我们不妨设$f$是可测实函数。

在L_p中我们定义加法和数乘如下：

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X,$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad\quad x \in X,$$

并定义

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu} \tag{5.17}$$

在L_p中若将几乎处处相等的函数看作相等，我们将证明它是线性空间，并在(5.17)式所决定的范数下是完备线性赋范空间。

定理5.8 设$f \in L_p$，$g \in L_p$，则αf，$f + g \in L_p$，其中α 为实数。

证明 因αf是可测函数，故从等式

$$\int|\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p\int|f|^p d\mu$$

知$\alpha f\in L_p$。设a,b是实数，从熟知的不等式

$$(|a|+|b|)^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),p\geqslant 1$$

得出

$$\int|f+g|^p d\mu\leqslant 2^p\left(\int|f|^p d\mu+\int|g|^p d\mu\right),$$

故$f+g\in L_p$。定理证完。

由定理5.8可知L_p构成线性空间。为证(5.17)式确定L_p上的一个范数，需先证两个著名的不等式。

引理5.5 设p,q是大于1的实数并且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那么对任意实数$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$，恒有

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}. \tag{5.18}$$

证明 当$\beta=0$时，(5.18)式显然成立。考虑函数族$\{f_\beta\}$，$\beta\in(0,\infty)$如下：

$$f_\beta(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta x \qquad x\in[0,\infty)$$

暂设β固定，令f_β的导数$f'_\beta(x)=x^{p-1}-\beta$等于0，我们得到

$x_1=\beta^{\frac{1}{p-1}}$，但当$x>0$时，$f''_\beta(x)=(p-1)x^{p-2}>0$，特别地$f''(x_1)>0$。因$f_\beta$在任意有限区间$[0,A]$上为连续函数，故对任意$A>x_1$，$f_\beta$在$x_1$的值是它在$[0,A]$上的最小值，从而不难看出$f_\beta$在$x_1$的值是它在$[0,+\infty)$的最小值，这样

$$f(x_1) \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta x, \quad x\in[0,+\infty).$$

但 $f(x_1)=\frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta\beta^{\frac{1}{p-1}}=\frac{\beta^q}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta^q=\beta^q-\beta^q=0$，

代入上式得

$$\beta x\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}, \qquad x\in[0,\infty),$$

由于β是任意的，从上式便得(5.18)式。引理证完。

定理5.9 设$f\in L_p, g\in L_q$，其中$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那么$fg\in L$且

$$\int|fg|d\mu\leqslant\|f\|_p\|g\|_q, \tag{5.19}$$

这里 $\|f\|_p=\sqrt[p]{\int|f|^p d\mu}$，$\|g\|_q=\sqrt[g]{\int|g|^q d\mu}$。

证明 若f与g中有一个几乎处处等于0，则定理显然成立。现设

$$\|f\|_p>0, \quad \|g\|_q>0,$$

构造函数φ,Ψ如下：

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\|f\|_p}, \Psi(x)=\frac{g(x)}{\|g\|_q}$$

引理5.5中令$\alpha=|\varphi(x)|$，$\beta=|\phi(x)|$得

$$|\varphi(x)\phi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\phi(x)|^q}{q}, \tag{5.20}$$

由此得出$\varphi\phi\in L$，从而$fg\in L$。又注意

$$\|\varphi\|_p=1, \quad \|\phi\|_q=1$$

故将(5.20)式积分后得

$$\int|\varphi\phi|d\mu\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

从而得出不等式

$$\int|fg|d\mu\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q.$$

定理证完。

不等式(5.19)通常被称为Hölder不等式，在$p=q=2$时称Schwarz不等式或Буняковский不等式。

定理5.10 设$p\geqslant1$，$f\in L_p$，$g\in L_p$，那末$f+g\in L_p$且

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{5.21}$$

证明 由定理5.8知$f+g\in L_p$。当$p=1$时(5.21)式是显然的。现设$p>1$，对于f，$g\in L_p$有

$$\int|f+g|^pd\mu=\int|f+g||f+g|^{p-1}d\mu$$

$$\leqslant\int|f||f+g|^{p-1}d\mu+\int|g||f+g|^{p-1}d\mu,$$

将Hölder不等式应用于上式最后两个积分，并注意$q=\dfrac{p}{p-1}$则有

$$\int|f+g|^pd\mu\leqslant\|f\|_p\left(\int|f+g|^pd\mu\right)^{\frac{1}{q}}+\|g\|_p\left(\int|f+g|^pd\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

以$\left(\int|f+g|^pd\mu\right)^{\frac{1}{q}}$除上式即得(5.21)。(在$\int|f+g|^pd\mu=0$时(5.21)式显然成立)。定理证完。

不等式(5.21)通常称Minkowski不等式。

推论 在L_p中若将几乎处处相等的函数看作相等，若对每一$f\in L_p$，令$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu}$，则$\|f\|_p$为$L_p$上的范数。

证明 由定理4.4知，$f=0, a.e. \Longleftrightarrow \|f\|_p=0$。又由定理4.7对任意实数$\alpha$我们有

$$\int |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int |f|^p d\mu,$$

故有$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$。最后由定理5.10即知$\|f\|_p$为$L_p$上的范数。推论证完。

设$f_n \in L_p$，$n=1,2,\cdots$及$f\in L_p$，若

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

则称$\{f_n\}$ p次平均收敛于f，简记作$f_n \xrightarrow{m_p} f$。当$p=1$时，$f_n \xrightarrow{m_1} f$即为上节定义的平均收敛。若

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_n - f_m\|_p = 0$$

则称$\{f_n\}$基本〔m_p〕收敛。

定理5.11 若$f_n \xrightarrow{m_p} f$则$f_n \xrightarrow{\mu} f$；若$\{f_n\}$基本〔m_p〕收敛，则$\{f_n\}$基本〔μ〕收敛。

证明 与定理5.3相似，请读者自行完成。

下一定理说明L_p在以(5.17)式所确定的范数下是完备线性赋范空间(即巴拿赫空间)。

定理5.12 设$f_n \in L_p$，$p \geqslant 1$，$n=1,2\cdots$，$\{f_n\}$ p次平均收敛于某个$f\in L_p$的充要条件为$\{f_n\}$基本〔m_p〕收敛。

证明 必要性：若$f_n \xrightarrow{m_p} f$，由定理5.10我们有

$$\|f_n - f_m\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f_m - f\|_p$$

故$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_n - f_m\|_p = 0$，即$\{f_n\}$基本〔$m_p$〕收敛。

充分性：若$\{f_n\}$基本〔m_p〕收敛，由定理5.11和定理5.5知，存在$\{f_n\}$的子序列$\{f_{n_k}\}$基本〔$a.un.$〕收敛，从而存在可测实函数f，使$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$，$(k\to\infty)$。固定自然数$i$，我们有

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_i} - f_{n_k}|^p = |f_{n_i} - f|^p, a.e.,$$

根据定理4.11(法都定理)得

$$\int |f_{n_i} - f|^p d\mu \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int |f_{n_i} - f_{n_k}|^p d\mu. \qquad (5.22)$$

设$\varepsilon>0$是任给定之实数，因$\{f_n\}$基本〔m_p〕收敛，故存在k_0使当$i\geqslant k_0$，$k\geqslant k_0$有

$$\|f_{n_i} - f_{n_k}\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

故从(5.22)得

$$\|f_{n_i} - f\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

因而$f_{n_i} - f \in L_p$，但又因$f_{n_i} \in L_p$，所以$f \in L_p$。最后由定理5.10

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \|f_n - f_{n_i}\|_p + \|f_{n_i} - f\|_p,$$

知$f_n \xrightarrow{m_p} f$。定理证完。

定理5.13 若$\mu(X)<+\infty$及$1\leqslant p_2\leqslant p_1$，那么

1) $f\in L_{p_1}\Rightarrow f\in L_{p_2}$，

2) $f_n\xrightarrow{m_{p_1}}f\Rightarrow f_n\xrightarrow{m_{p_2}}f$。

证明 1)和2)的证明是类似的，仅证明2)。在Hölder不等式中，将f换以$|f_n-f|^{p_2}$，g换以1，并令$p=\frac{p_1}{p_2}$，$q=\frac{p_1}{p_1-p_2}$，这样

$$\int|f_n-f|^{p_2}d\mu\leqslant\left(\int|f_n-f|^{p_1}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\mu(X)^{\frac{1}{q}}$$

由上式可知，若$f_n\xrightarrow{m_{p_1}}f$则$f_n\xrightarrow{m_{p_2}}f$。定理证完。

定理5.14 设$p\geqslant1$，$f\in L_p$，则存在简单函数列$\{h_n\}$，使$h_n\in L_p$，$n=1,2,\cdots$且$h_n\xrightarrow{m_p}f$。若更设f非负，那么h_n，$n=1,2,\cdots$亦非负，且$h_n\uparrow$。

证明 因f为可测函数，故f^+和f^-为非负可测函数，由定理3.6存在非负简单函数列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$使$f_n\uparrow f^+$，$g_n\uparrow f^-$。令

$$h_n=f_n-g_n,$$

那么$\{h_n\}$为简单函数列且$\{h_n\}$处处收敛于f。又

$$|h_n|\leqslant f_n+g_n\leqslant f^++f^-=|f|,\tag{5.23}$$

因$f\in L_p$故$\{h_n\}$为L_p中的简单函数列。从$|h_n-f|^p\to0$及(5.23)，根据控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int|h_n-f|^pd\mu=0,$$

亦即$h_n \xrightarrow{m_p} f$。若更设f非负，那么$f=f^+$，$h_n=f_n$，从而h_n非负$n=1,2,\cdots$且$h_n\uparrow$。定理证完。

§3 一致可积性

在本节中我们恒设$(X,\mathbf{S},\mu)$为有限测度空间。设$f_n\in L_1$，$n=1,2,\cdots$如果对任给$\varepsilon>0$，存在$k>0$使

$$\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}} |f_n|\,d\mu<\varepsilon,\quad 凡\ n=1,2,\cdots,$$

则称$\{f_n\}$一致可积。如果对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$，$\mu(E)<\delta$有

$$\int_E |f_n|\,d\mu<\varepsilon,\quad 凡 n=1,2,\cdots,$$

则称$\{f_n\}$一致绝对连续。如果$\sup\limits_{n\geq 1}\int|f_n|d\mu<+\infty$，则称$\{f_n\}$积分一致有界。

定理5.15 设$f_n\in L_1$，$n=1,2,\cdots$则$\{f_n\}$一致可积的充分必要条件为$\{f_n\}$一致绝对连续及积分一致有界。

证明 必要性：设$\{f_n\}$一致可积，那末对任给$\varepsilon>0$，存在$k>0$使

$$\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}} f_n\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2},\quad 凡n=1,2,\cdots.$$

令$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2k}$那末对任意$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$，我们有

$$\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu=\int_{E\cap\{x:|f_n(x)|>k\}} |f_n|\,d\mu$$

$$+\int_{E\cap\{x:|f_n(x)|<k\}}|f_n|d\mu$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+k\mu(E)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

对一切自然数n成立，因此$\{f_n\}$一致绝对连续。

又

$$\int|f_n|d\mu=\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}}|f_n|d\mu$$

$$+\int_{\{x:|f_n(x)|<k\}}|f_n|d\mu\quad<\varepsilon+k\mu(X).$$

对一切自然数n成立，因此$\{f_n\}$积分一致有界。

充分性：若$\{f_n\}$一致绝对连续及积分一致有界，那么对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$，有

$$\int_E|f_n|d\mu<\varepsilon,\ \text{凡}n=1,2,\cdots. \tag{5.24}$$

对于任意$k>0$，我们有

$$\mu(\{x:|f_n(x)|>k\})\leqslant\frac{1}{k}\int_{\{x:|f_n|>k\}}|f_n|d\mu$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\int|f_n|d\mu\leqslant\frac{1}{k}\sup_{n\geqslant1}\int|f_n|d\mu,$$

取$k>0$且$\frac{1}{k}\sup\limits_{n\geqslant1}\int|f_n|d\mu<\delta$，那么$\mu(\{x:|f_n(x)|>k\})<\delta$，

由(5.24)式得

$$\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}}|f_n|d\mu<\varepsilon,$$

这便证明了$\{f_n\}$一致可积。定理证完。

定理5.16 设$\{f_n\}$为可测函数列，若存在可积函数g，使对一切自然数n及$E\in\mathbf{S}$均有

$$\int_E |f_n| d\mu \leqslant \int_E |g| d\mu$$

则$\{f_n\}$一致可积。

证明 由假设知

$$\sup_{n\geqslant 1}\int |f_n| \mathrm{d}\mu \leqslant \int |g| d\mu < +\infty,$$

故$\{f_n\}$积分一致有界。由不定积分的绝对连续性，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$有

$$\int |g| d\mu < \varepsilon,$$

从而由假设得

$$\int_E |f_n| d\mu \leqslant \int_E |g| d\mu < \varepsilon, \quad n=1,2,\cdots,$$

故$\{f_n\}$一致绝对连续，由定理5.15，$\{f_n\}$一致可积。定理证完。

推论 设$\{f_n\}$是可测函数列，若存在可积函数g使

$$|f_n| \leqslant g \quad a.e., \quad 凡 n=1,2,\cdots,$$

则$\{f_n\}$一致可积。

证明 由定理5.16立即得出。

定理5.17 设$\{f_n\}$为可测函数列，若存在$p>1$使$\sup\limits_{n\geqslant 1}\int |f_n|^p d\mu < +\infty$，则$\{f_n\}$一致可积。

证明 令$a=\sup\limits_{n\geq 1}\int|f_n|^p d\mu$，对每一自然数$k$，我们有

$$k^{p-1}\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}}|f_n|d\mu\leqslant\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}}|f_n|^p d\mu$$

$$\leqslant\int|f_n|^p d\mu\leqslant a.$$

对任给$\varepsilon>0$，存在自然数k使$\frac{a}{k^{p-1}}<\varepsilon$，从而

$$\int_{\{x:|f_n(x)|>k\}}|f_n|d\mu\leqslant\frac{a}{k^{p-1}}<\varepsilon,$$

这便证明了$\{f_n\}$一致可积。定理证完。

定理5.18 设$f_n\in L_1$，$n=1,2,\cdots$，f为一几乎处处有限可测函数，则$f_n\xrightarrow{m.}f$的充要条件为$\{f_n\}$一致可积且$f_n\xrightarrow{\mu}f$.

证明 不妨设f_n，$n=1,2,\cdots$和f均为可测实函数。必要性：若$f_n\xrightarrow{m.}f$，由定理5.2我们有$f_n\xrightarrow{\mu}f$. 往证$\{f_n\}$一致可积。显然对每一$E\in\mathbf{S}$，我们有

$$\int_E|f_n|d\mu\leq\int|f_n-f|d\mu+\int_E|f|d\mu, \tag{5.25}$$

由$f_n\xrightarrow{m.}f$知，对任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$有

$$\int|f_n-f|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.26}$$

因$f_1,\cdots,f_N,f$为可积函数，故存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$，有

$$\int_{F}|f_n|\,d\mu<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots,N, \tag{5.27}$$

及

$$\int_{F}|f|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.28}$$

由(5.25)—(5.28)式，对一切自然数n，当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$，均有

$$\int_{E}|f_n|\,d\mu<\varepsilon,$$

这便证明了$\{f_n\}$一致绝对连续。此外由(5.25)式及$f_1,\cdots f_N,f$的可积性知$\{f_n\}$积分一致有界，根据定理5.15，$\{f_n\}$一致可积。

充分性：设$\{f_n\}$一致可积，由定理5.15 $\{f_n\}$一致绝对连续及积分一致有界。又因$f_n\xrightarrow{\mu}f$，由定理5.5存在$\{f_n\}$的子序列$\{f_{n_k}\}$使$f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f(k\to\infty)$，由法都定理我们有

$$\int|f|\,d\mu=\int\lim_{k\to\infty}|f_{n_k}|\,d\mu\leq\lim_{k\to\infty}\int|f_{n_k}|\,d\mu$$

$$\leq\sup_{n\geq1}\int|f_n|\,d\mu<+\infty;$$

故f可积。由$\{f_n\}$一致绝对连续及f可积，对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)<\delta$均有

$$\int_{E}|f_n|\,d\mu<\varepsilon,\qquad n=1,2,\cdots, \tag{5.29}$$

$$\int_{E}|f|\,d\mu<\varepsilon. \tag{5.30}$$

因$f_n \xrightarrow{\mu} f$，故存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\mu\{x: |f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}<\delta,$$

从而由(5.29)和(5.30)得

$$\int_{\{x: |f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}} |f_n|\,d\mu<\varepsilon,$$

$$\int_{\{x: |f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon} |f|\,d\mu<\varepsilon,$$

从而

$$\int|f-f_n|d\mu=\int_{\{x:|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\}}|f-f_n|d\mu+$$

$$+\int_{\{x:|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}}|f-f_n|d\mu$$

$$\leq\varepsilon\mu(X)+\int_{\{x:|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}}|f|d\mu+$$

$$+\int_{\{x:|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}}|f_n|\,d\mu$$

$$\leq\varepsilon\mu(X)+\varepsilon+\varepsilon=\varepsilon(\mu(X)+2),$$

这便证明了$f_n \xrightarrow{m} f$。定理证完。

定理5.18′ 设$p\geq1$，$f_n\in L_p$，$n=1,2,\cdots$，f为一几乎处处有限可测函数，则$f_n \xrightarrow{m_p} f$的充要条件为$\{|f_n|^p\}$一致可

积且$f_n \xrightarrow{\mu} f$。

证明 只须在定理5.18的证明中，用$|f|^p$代替$|f|$，并且用不等式

$$|f+g|^p \leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$$

代替三角不等式$|f+g|<|f|+|g|$即可。定理证完。

习　题

①设$(X,\mathbf{S},\mu)=([0,+\infty),[0,+\infty)\cap\widetilde{\mathbf{B}},L)$，$f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$，$n=1,2,\cdots$，证明$\{f_n\}$一致收敛于0，$\{f_n\}$不平均收敛于0。

②设$(X,\mathbf{S},\mu)=([0,1],[0,1]\cap\widetilde{\mathbf{B}},L)$，$f_n=x^n$，

$$n=1,2,\cdots,f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq 1,\\ 1 & x=1\end{cases},$$

证明$\{f_n\}$ $a.un.$收敛于f，但f_n不一致收敛于f。

③设$\{f_n\}$基本$[a.e.]$($[a.un.]$,$[\mu]$,$[m_p]$)收敛，又存在$\{f_n\}$的子序列$\{f_{n_k}\}$使$\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}=f[a.e.]$，($[a.un.]$，$[\mu]$，$[m_p]$)，证明

$$\lim_{\mu\to\infty}f_n=f[a.e.],([a.un.],[\mu],[m_p]).$$

④设$\{f_n\}$为可测实函数列，f为可测实函数，证明$f_n \xrightarrow{\mu} f \Longleftrightarrow$任给$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n>N$，$\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})<\varepsilon$。

⑤证明$f_n \xrightarrow{\mu} f$的充要条件为：$\{f_n\}$的任意子序列都有子序列依测度收敛于f。

更设$\mu(X)<+\infty$，则$f_n \xrightarrow{\mu} f$的充要条件为：$\{f_n\}$的任何子序列都含有$a.e.$收敛于f的子序列。

⑥若$f_n \xrightarrow{\mu} f$，$g_n \xrightarrow{\mu} g$，证明

i) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$，

ii) $\alpha f_n \xrightarrow{\mu} \alpha f$，其中$\alpha$为实数，

iii) $f_n+g_n \xrightarrow{\mu} f+g$，

iv)更设$\mu(X)<+\infty$，φ是R^2上的连续函数，那么

$\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow{\mu} \varphi(f, g)$。

⑦若存在$\varepsilon_n \downarrow 0$，使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x: |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon_n\}) < +\infty,$$

证明$f_n \xrightarrow{a.un.} f$，并用此结果证明定理5.5i)。

⑧设$f_n \xrightarrow{a.e.} f$且存在可积函数g，使$|f_n| \leq g$，$a.e.$ $n=1, 2, \cdots$，则$f_n \xrightarrow{a.un.} f$。

⑨若$f_n \xrightarrow{a.e.} f$，且满足下述条件之一：

i) $\mu(X)<+\infty$,

ii) 存在可积函数g，使$|f_n|\leq g$，$a.e.$ $n=1,2,\cdots$。

直接证明$f_n\xrightarrow{\mu}f$(不用定理5.4及定理5.2)。

⑩设$\{f_n\}$为可积函数列，f可积，证明$f_n\xrightarrow{m.}f$ 的充要条件为：当$n\to\infty$时关于$E\in\mathbf{S}$一致地$\int_E f_n d\mu\to\int_E f d\mu$。

⑪设$\{f_n\}$为非负可积函数列，f可积，$f_n\xrightarrow{a.e.}f$（或

$f_n\xrightarrow{\mu}f$)，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\int f d\mu$$

的充要条件为$f_n\xrightarrow{m.}f$。

⑫若$f_n\in L_p$，且$\int|f_n-f|^p d\mu\to 0$，则$f\in L_p$。

⑬若$\mu(X)=+\infty$，$1\leq p_2<p_1$，$f_n\xrightarrow{mp_1}f$能否推出$f_n\xrightarrow{mp_2}f$。考察例子：$(X,\mathbf{S},\mu)=([0,+\infty),[0,+\infty)\cap\widetilde{\mathbf{B}},L)$，

$$f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]},\quad n=1,2,\cdots,\qquad f=0。$$

⑭ $f_n\xrightarrow{mp}f$，又$g\in L_q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$，证明

$f_n g\xrightarrow{m}fg$。

⑮设可积函数列$\{f_n\}$，$\{g_n\}$一致绝对连续(或一致可积)，证明$\{f_n+g_n\}$亦一致绝对连续(或一致可积)。

第六章 可测变换

§1 变　　换

本节我们研究集之间的对应关系。设X和Y是两个不空集，若对X中的每一个元素X，有Y中唯一的一个元素y与之对应，那么这个对应关系就称为X到Y的一个变换。以后若不特别声明，我们用一个字母例如f来代表变换，而记号$f(x)$则表示Y中与$x\epsilon X$相对应的元素，并把$f(x)$称为元素x的象。集X称变换f的定义域，Y中一切形如$f(x)$，$x\epsilon X$的点组成的集称f的值域。由此可见变换是函数概念的推广。例如普通的实变函数就可以看成实数空间到实数空间的一个变换。又如测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的积分就可以看成可积函数集到广义实数集的一个变换。X到Y的一个变换f,如果它的值域包含在Y中，则称f为X到Y内的变换；如果它的值域恰好等于Y，则称f为X到Y上的变换。集X到Y上的变换f，若满足条件：$f(x_1)=f(x_2)$当且仅当$x_1=x_2$，那么f称为$1-1$变换。设f是集X到Y内的变换，$A\subset X$，那么集

$$\{f(x):x\epsilon A\}$$

称为集A的象，记为$f(A)$。若$B\subset Y$，则集

$$\{x:x\epsilon X,f(x)\epsilon B\}$$

称为集B的原象，并记为$f^{-1}(B)$。

集的像具有下述性质：

定理6.1 设f为集X到Y内的变换，A，A_1和A_2为X的子集，又$A_t, t\in T$为X的子集族，则

i) $f(\phi)=\phi$

ii) 若$A_1\subset A_2$，则$f(A_1)\subset f(A_2)$，

iii) $f(\bigcup_{t\in T} A_t)=\bigcup_{t\in T} f(A_t)$，

iv) $f(\bigcap_{t\in T} A_t)\subset \bigcap_{t\in T} f(A_t)$，

v) $f(A_1)\setminus f(A_2)\subset f(A_1\setminus A_2)$，

vi) $f(X)\setminus f(A)\subset f(X\setminus A)$，

特别地，当f为1－1变换时，iv)—vi)中的包含号均变成等号。

证明 i) 是显然的。

ii) 的证明：设$y\in f(A_1)$，则存在$x\in A_1$使$f(x)=y$，因$A_1\subset A_2$，故$x\in A_2$，从而$y\in f(A_2)$。

iii) 的证明：对每一$t\in T$，$A_t\subset \bigcup_{t\in T} A_t$，由ii) 得，

$f(A_t)\subset f(\bigcup_{t\in T} A_t)$，从而

$$\bigcup_{t\in T} f(A_t)\subset f(\bigcup_{t\in T} A_t) \tag{6.1}$$

另一方面，若$y\in f(\bigcup_{t\in T} A_t)$，则存在$x\in \bigcup_{t\in T} A_t$使$f(x)=y$，从而必存在一$t_0\in T$，使$y\in f(A_{t_0})$，故$y\in \bigcup_{t\in T} f(A_t)$，这便证明了

$$f(\bigcup_{t\in T} A_t)\subset \bigcup_{t\in T} f(A_t) \tag{6.2}$$

综合(6.1)和(6.2)式即得iii)。

iv)的证明：由ii)立即得出。当f为1-1变换时，若$y\in\bigcap_{t\in T} f(A_t)$，则存在$x\in\bigcap_{t\in T} A_t$，使$f(x)=y$，从而$y\in f(\bigcap_{t\in T} A_t)$，这就是说$\bigcap_{t\in T} f(A_t)\subset f(\bigcap_{t\in T} A_t)$。再利用iv)即得$f(\bigcap_{t\in T} A_t)=\bigcap_{t\in T} f(A_t)$。

v)的证明：设$y\in f(A_1)\setminus f(A_2)$，则$y\in f(A_1)$，故存在$x\in A_1$，使$y=f(x)$，又因$y\bar{\in} f(A_2)$故$x\bar{\in} A_2$，因而$x\in A_1\setminus A_2$，这就是说$y\in f(A_1\setminus A_2)$，由此得证v)。当$f$是1-1变换时，v)中包含号变为等号是显然的。最后在v)中取$A_1=X$，$A_2=A$即得vi)。定理证完。

当f不是1-1变换时，iv)—vi)中的反向包含号未必成立。例如X为实数空间R，$Y=[-1, 1]$，变换f为R上的函数$\sin x$，取$A_1=[0,2\pi]$，$A_2=[4\pi,6\pi]$，那么

$$f(A_1)\cap f(A_2)=[-1,1]$$

而$f(A_1\cap A_2)=\phi$，故$f(A\cap A_2)\neq f(A_1)\cap f(A_2)$。

又取$A_1=[0,2\pi]$，$A_2=[0,2\pi)$，那么

$$f(A_1)\setminus f(A_2)=\phi,$$

而$f(A_1\setminus A_2)=f(\{2\pi\})=\{0\}$，故$f(A_1\setminus A_2)\neq f(A_1)\setminus f(A_2)$。最后令$A=[0,2\pi]$，那么

$$f(X)\setminus f(A)=\phi,$$

而$f(X\setminus A)=[-1,1]$，故$f(X)\setminus f(A)\neq f(A')$。

下面我们来讨论集的原像的性质。

定理6.2 设f是集X到集Y内的变换，B，B_1和B_2为Y的子集，又B_t，$t\in T$为Y中的子集族，则

i) $f^{-1}(\phi)=\phi$,

ii) 若$B_1\subset B_2$，则$f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$,

iii) $f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t)$,

iv) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$,

v) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$,

vi) $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$.

证明 i)和ii)是显然的。由ii)及下述关系

$$x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$$

便可得到iii)和v)，vi)是v)的特殊情况。往证iv)。

设$x\in\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$，$x\in f^{-1}(B_t)$，对一切$t\in T$，故此$x\in X$且$f(x)\in B_t$，对一切$t\in T$，从而$f(x)\in\bigcap_{t\in T}B_t$，因而有$x\in f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)$，这便证明了

$$\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)\subset f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t). \tag{6.2}$$

另一方面。由ii)我们有

$$f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)\subset f^{-1}(B_t),\ 对切t\in T,$$

因而有

$$f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)\subset\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t), \tag{6.4}$$

综合(6.3)和(6.4)式便得iv)。定理证完。

设**E**是以集Y的子集为元素的集族，f是集X到Y内的变换，定义记号$f^{-1}(\mathbf{E})$的意义如下：

$$f^{-1}(\mathbf{E}) = \{ f^{-1}(E): E \in \mathbf{E} \}$$

并称它为集族$\mathbf{E}$的原象。由定理6.2我们得到：若$\mathbf{E}$为Y内的σ代数，则$f^{-1}(\mathbf{E})$为X内的σ代数。换言之，σ代数的原象也是σ代数。

定理6.3 设f是集X到集Y内的变换，$\mathbf{E}$是以Y的子集为元素的集族，则

$$f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{E})) = \mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E})), \tag{6.5}$$

其中$\mathbf{S}(\mathbf{E})$为由$\mathbf{E}$产生的Y中的σ代数，$\mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E}))$为由$f^{-1}(\mathbf{E})$产生的$X$中的$\sigma$代数。

证明 因$\mathbf{S}(\mathbf{E})$为σ代数，故$f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{E}))$亦为$\sigma$代数，但$f^{-1}(\mathbf{E}) \subset f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{E}))$，故有

$$\mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E})) \subset f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{E})). \tag{6.6}$$

另一方面，令

$$\mathbf{F} = \{ F: F \in \mathbf{S}(\mathbf{E}),\ f^{-1}(F) \in \mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E})) \},$$

应用定理6.2不难验明$\mathbf{F}$为σ代数，但$\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$，故此$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$，又按$\mathbf{F}$的定义得$f^{-1}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E}))$，故此得

$$f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{E})) \subset \mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{E})). \tag{6.7}$$

由(6.6)和(6.7)两式便得(6.5)式。定理证完。

下面的定理给出了集的象及原象的一些关系式。

定理6.4 设f是集X到集Y内的变换，$A \subset X$，$B \subset Y$，则

i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$，当f是1—1变换时等号成立。

ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$，当f是X到Y上的映象时等号成立。

iii) $f(A) \subset B$的充要条件是$A \subset f^{-1}(B)$。

证明 i)和ii)显然，往证iii)。若$f(A) \subset B$，由定理6.2，

$f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(B)$，再由i) $A\subset f^{-1}(f(A))$，从而 $A\subset f^{-1}(B)$。反之若$A\subset f^{-1}(B)$，由定理6.2得$f(A)\subset f(f^{-1}(B))$，再由ii) $f(f^{-1}(B))\subset B$，从而$f(A)\subset B$。定理证完。

一般地说，定理6.4i)和ii)中的包含号未必可以改成等号。例如取$X=Y=$实数空间R，f为R上的函数$\sin x$，取$A=[0,2\pi]$，那么$f(A)=[-1,1]$，而$f^{-1}(f(A))=X$，故$f^{-1}(f(A))\neq A$。又取$B=Y$，那么$f^{-1}(B)=X$，而$f(f^{-1}(B))=[-1,1]$，故$f(f^{-1}(B))\neq B$。

最后，我们再介绍两个与变换有关的术语——逆变换和复合变换。

设f是X到Y上的1—1变换，对每一$y\in Y$有唯一的$x\in X$，使$f(x)=y$，则定义在Y上由下式

$$f^{-1}(y)=x,\quad y\in Y,$$

确定的变换f^{-1}称为f的逆变换。逆变换就是数学分析中反函数概念的推广。易见变换及其逆变换有下面关系式

$$f^{-1}(f(x))=x,\quad \text{凡}x\in X;$$

$$f(f^{-1}(y))=y,\quad \text{凡}y\in Y.$$

设f是集X到集Y内的变换，g是集Y到集Z内的变换，那么由下式

$$h(x)=g(f(x)),\quad x\in X,$$

确定的由X到Z内的变换h，称f和g的复合变换，并记作$h=g\circ f$。

定理6.5 设f为集X到集Y内的变换，g为Y至集Z内的变换，又$h=g\circ f$，则对Z中任一子集C，恒有

$$h^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

证明 从下列关系式

$$x\in h^{-1}(C)\Leftrightarrow h(x)=g(f(x))\in C\Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(C)$$
$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(C))$$

即得。定理证完。

§2 可 测 变 换

设$(X,\mathbf{S})$和$(Y,\mathbf{U})$是两个可测空间，f是X到Y内的变换，如果对每一$B\in\mathbf{U}$，均有$f^{-1}(B)\in\mathbf{S}$，则称f为X到Y内的可测变换。有时为明确起见，记作f可测$\boxed{\mathbf{S},\mathbf{U}}$或称$f$为$(X,\mathbf{S})$到$(Y,\mathbf{U})$内的可测变换。由可测变换的定义知，对任意$X$到$Y$内的可测变换$f$均有

$$f^{-1}(\mathbf{U})\subset\mathbf{S}.$$

这就是说，对可测变换来说，可测集的原象是可测集。可测变换是可测函数概念的推广，这可由下面定理6.6及定理6.6′看出。

定理6.6 设f是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的实函数，则f是$(X,\mathbf{S})$上的可测实函数的充要条件是f为$(X,\mathbf{S})$到$(R,\mathbf{B})$内的可测变换，其中R为实数空间，$\mathbf{B}$为波雷耳集族。

证明 必要性：设f是$(X,\mathbf{S})$上的可测实函数，由可测函数的定义，对每一实数c恒有

$$f^{-1}((-\infty,c))=\{x:f(x)<c\}\in\mathbf{S}.$$

令$\mathbf{C}=\{(-\infty,c):c\text{为实数}\}$，由(6.8)式得

$$f^{-1}(\mathbf{C})\subset\mathbf{S}.$$

根据第一章§5知，$\mathbf{B}=\mathbf{S}(\mathbf{C})$，由定理6.3得

$$f^{-1}(\mathbf{B})=f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{C}))=\mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{C}))\subset\mathbf{S},$$

这就是说，f是$(X,\ \mathbf{S})$到$(R,\mathbf{B})$内的可测变换。

充分性：设f可测$\boxed{\mathbf{S},\mathbf{B}}$，又设$c$为任意固定实数，因$(-\infty,c)\in\mathbf{B}$，故此

$$\{x:f(x)<c\}=f^{-1}\{(-\infty,c)\}\in\mathbf{S},$$

这便证明了充分性。定理证完。

定理6.6′ 设f是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的广义实函数，则f是$(X,\mathbf{S})$上的可测广义实函数的充要条件是f为$(X,\mathbf{S})$到$(R^c,\mathbf{B}^c)$内的可测变换，其中R^c为广义实数空间，B^c为广义波雷耳集族。

证明 由第一章§5知，$\mathbf{B}^c$中每一集或者是$\mathbf{B}$中的集，或者是$\mathbf{B}$中的集并$\{+\infty\}$或$\{-\infty\}$或$\{+\infty,\ -\infty\}$，因而容易看出，f是$(X,\mathbf{S})$到$(R^c,\mathbf{B}^c)$内的可测变换的充要条件是：$f^{-1}(\mathbf{B})\subset\mathbf{S}$及$f^{-1}\{+\infty\}\in\mathbf{S}$，$f^{-1}\{-\infty\}\in\mathbf{S}$，利用定理6.6及定理3.1推论立即得出定理6.6′。定理证完。

定理6.7 设f是可测空间$(X,\mathbf{S})$到可测空间$(Y,\mathbf{U})$内的可测变换，g是$(Y,\mathbf{U})$到可测空间$(Z,\mathbf{V})$内的可测变换，则$g\circ f$是$(X,\mathbf{S})$到$(Z,\mathbf{V})$内的可测变换。

证明 由定理6.5及g的可测性得

$$(g\circ f)^{-1}(\mathbf{V})=f^{-1}(g^{-1}(\mathbf{V}))\subset f^{-1}(\mathbf{U}),$$

故$g\circ f$是可测$\boxed{f^{-1}(\mathbf{U}),\mathbf{V}}$。又从$f$的可测性知

$$f^{-1}(\mathbf{U})\subset\mathbf{S},$$

故$g\circ f$是可测$\boxed{\mathbf{S},\mathbf{V}}$。定理证完。

设$(\mathbf{Y},\mathbf{U})$是一个可测空间，f是X到Y内的变换，(为方

便今后我们将简称f是X到可测空间$(Y,\mathbf{U})$内的变换)。X上使f为可测变换的最小σ代数显然为$f^{-1}(\mathbf{U})$，又g是$(Y,\mathbf{U})$到可测空间$(Z,\mathbf{V})$的可测变换，由定理6.7知$g\circ f$是可测$\boxed{f^{-1}(\mathbf{U}),\mathbf{V}}$。下面讨论如下问题：若$h$是$X$到可测空间$(Z,\mathbf{V})$内的变换且$h$可测$\boxed{f^{-1}(\mathbf{U}),\mathbf{V}}$，试问是否存在一个由$(Y,\mathbf{U})$到$(Z,\mathbf{V})$内的可测变换$g$，使$h=g\circ f$？在一般情况下，这样的$g$不一定存在。例如设$X$，$Y$和$Z$是如下三个集

$$X=\{x_1,x_2\},\quad x_1\neq x_2;$$
$$Y=\{y\};$$
$$Z=\{z_1,z_2\},\quad z_1\neq z_2,$$

又$\mathbf{U}=\{Y,\phi\}$，$\mathbf{V}=\{Z,\phi\}$分别是Y和Z中的σ代数。定义X到Y内的变换f如下：

$$f(x_1)=y;\quad f(x_2)=y.$$

又定义X到Z内的变换h如下：

$$h(x_1)=z_1;\quad h(x_2)=z_2.$$

那么不可能存在g使$h=g\circ f$。但当$(Z,\mathbf{V})=(R^c,\mathbf{B}^c)$时，这样的$g$必存在，这可由下述定理看出。

定理6.8 设f是集X到可测空间$(Y,\mathbf{U})$内的变换，h为X上的广义实函数且可测$\boxed{f^{-1}(\mathbf{U}),\mathbf{B}^c}$，那末存在$(Y,\mathbf{U})$上的可测函数$g$使得$h=g\circ f$。

证明 先暂设h是可测空间$(X,f^{-1}(\mathbf{U}))$上的简单函数

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{E_k}(x)\qquad x\in X$$

其中$\{E_k\}$是$(X,f^{-1}(\mathbf{U}))$中的两两不相交的可测集并且$\bigcup_{k=1}^{n}$

$E_k=X$。因每一$E_k\in f^{-1}(\mathbf{U})$，故$E_k=f^{-1}(G_k)$，$G_k\in\mathbf{U}$，$k=1,2,\cdots n$。不妨设$\{G_k\}$两两不相交（若$G_k$与$G_j(k\neq j)$相交，则其交集必含于$Y\setminus f(X)$，因而将$G_k$互不相交化后，其原像不会变化。）令

$$g(y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{G_k}(y),\quad y\in Y,$$

则g即为所求的可测函数。事实上设x_0是X中的任一元素，则x_0必属于且只属于某一确定的集E_m，因而$h(x_0)=\alpha_m$，另一方面因$x_0\in E_m$，故$f(x_0)\in G_m$，这样$g(f(x_0))=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{G_k}(f(x_0))=\alpha_m=h(x_0)$，这说明$h=g\circ f$，故定理对于$h$是简单函数时成立。

现设h是可测函数，取$(X,f^{-1}(\mathbf{U}))$上的简单函数列$\{h_n\}$使对每一$x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=h(x).$$

根据上一段已证得的结果，对于每一简单函数h_n，恒有$(Y,\mathbf{U})$上的可测函数g_n使$g_n\circ f=h_n$。令

$$g(y)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}g_n(y) & \text{当此极限存在时}\\ 0 & \text{在相反的情形}\end{cases},$$

则g是$(Y,\mathbf{U})$上的可测函数，并且对于每一$x\in X$，有

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(f(x))=g(f(x)),$$

即$h=g\circ f$。定理证完。

注：若f是X到Y内的变换，从定理6.8的证明知，对同一

h，可能存在$(Y,\mathbf{U})$上的不同可测函数g_1和g_2使

$$h=g_1\circ f \qquad 和 h=g_2\circ f$$

易知此时g_1和g_2有下述关系

$$g_1(y)=g_2(y) \qquad 凡 y\in f(X)$$

由此可见，当f是X到Y上的变换时，那末g被h所唯一确定。

设f是可测空间$(X,\mathbf{S})$到可测空间$(Y,\mathbf{U})$ 内的可测变换，又μ是$\mathbf{S}$上的测度，利用μ我们可以在$\mathbf{U}$上定义一个广义实值集函数ν如下：

$$\nu(E)=\mu(f^{-1}(E)),\quad E\in\mathbf{U}.$$

从定理6.2，易知ν是$\mathbf{U}$上的测度，我们用记号μf^{-1}来表示这个测度，即$\nu=\mu f^{-1}$，并把它称为由可测变换f所引出的测度。

定理6.9 设f是测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$至可测空间$(Y,\mathbf{U})$内的一个可测变换，又g是$(Y,\mathbf{U})$上的可测函数，则

$$\int g\circ f d\mu=\int g d(\mu f^{-1}), \tag{6.9}$$

这里等号的意义是：当等式一端的积分存在时，则另一端的积分也存在并且两者相等。

证明 先注意$g\circ f$是可测$\mathbf{S},\mathbf{B}$。现暂设g是$(Y,\mathbf{U})$中的可测集E的特征函数，$g=\chi_E$，$E\in\mathbf{U}$，从下面关系式

$$g(f(x))=\chi_E(f(x))=\begin{cases}1 & 当 x\in f^{-1}(E)\\ 0 & 当 x\overline{\in} f^{-1}(E)\end{cases},$$

知$g\circ f=\chi_{f^{-1}(E)}$。因而

$$\int g d\mu f^{-1}=\int\chi_E d\nu=\nu(E)=\mu(f^{-1}(E))$$

$$\int g\circ f d\mu = \int \chi_{f^{-1}(E)} d\mu = \mu(f^{-1}(E))$$

故(6.9)式当g是特征函数时是成立的。不难证明当g是非负简单函数时(6.9)式仍成立。

现设 g 是非负可测函数，取递增的非负简单函数列 $\{g_n\}$ 使$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$。考虑函数$g_n\circ f$，由刚才已证得的结果有

$$\int g_n\circ f d\mu = \int g_n d\nu, \tag{6.10}$$

对每一自然数n成立。注意$\{g_n\circ f\}$是非负可测函数列且 $g_n\circ f\uparrow g\circ f$，故将(6.10)式取极限后便有

$$\int g\circ f d\mu = \int g d\nu,$$

故定理当g是非负可测函数时成立。

现讨论一般情形。假设g是$(Y,\mathbf{U})$上的可测函数，将g分解为它的正部分和负部分之差，

$$g = g^+ - g^-.$$

现$g\circ f = (g\circ f)^+ - (g\circ f)^-$，但

$$(g\circ f)^+(x) = \sup\{g(f(x)),0\} = g^+(f(x)) = (g^+\circ f)(x);$$

$$(g\circ f)^-(x) = \sup\{-g(f(x)),0\} = g^-(f(x)) = (g^-\circ f)(x),$$

故此$(g\circ f)^+ = g^+\circ f$；$(g\circ f)^- = g^-\circ f$。现假设(6.9)式中的一端的积分存在，那未从下式

$$\int(g\circ f)d\mu=\int(g\circ f)^+d\mu-\int(g\circ f)^-d\mu$$

$$=\int g^+\circ fd\mu-\int g^-\circ fd\mu$$

$$=\int g^+d\nu-\int g^-d\nu=\int gd\nu,$$

就知道定理成立。定理证完。

推论 沿用定理6.9中的记号，并设$E\in\mathbf{U}$则

$$\int_{f^{-1}(E)}g\circ fd\mu=\int_E gd\mu f^{-1}$$

这里等号的意义是，当等式一端的积分存在，则另一端积分也存在，并且两者相等。

证明 对函数$g\chi_E$应用定理6.9，并注意

$$(g\chi_E)\circ f=(g\circ f)\chi_{f^{-1}(E)}$$

立即得到推论的结论。推论证完。

§3 随机变数的分布函数和矩

本节我们介绍§2在概率论中的某些应用。正如第四章§1所述，可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度μ如果满足$\mu(X)=1$，则称为概率测度。测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$中的测度μ若是概率测度，则称为概率空间。设$(X,\mathbf{S},\mu)$为概率空间，定义在它上面的可测实函数称为随机变数，以ξ表之。

若ξ为概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，则它在一维波雷集族$\mathbf{B}$上产生一个概率测度ν如下：

$$\nu(B)=\mu(\xi^{-1}(B)),\text{凡}B\in\mathbf{B},$$

ν称为随机变数ξ的概率分布。对每一实数λ令

$$F(\lambda)=\nu((-\infty,\lambda))=\mu(\{x: x\in X, \xi(x)<\lambda\}),$$

这样我们便确定了实数空间R上的一个实函数F，称为随机变数ξ的概率分布函数，简称分布函数。

引理6.1 随机变数ξ的分布函数F满足下述性质：

i) F是不降函数，即$\lambda_1<\lambda_2$则$F(\lambda_1)\leqslant F(\lambda_2)$。

ii) F是左连续函数。

iii) $F(+\infty)=1$和$F(-\infty)=0$，其中$F(+\infty)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}F(\lambda)$。

证明 由分布函数的定义及测度的单调性立即得到i)。往证 ii)，设$\lambda_n\in R$且$\lambda_n\uparrow\lambda$，那么由测度的下连续性（定理2.16)）得

$$F(\lambda_n)=\nu((-\infty,\lambda_n))\to\nu((-\infty,\lambda))=F(\lambda),$$

这便证明了F是左连续的。

往证 iii) 由测度的下连续性及上连续性得

$$F(+\infty)=\lim_{n\to\infty}F(n)=\lim_{n\to\infty}\nu((-\infty,n))=\nu(R)=1,$$

$$F(-\infty)=\lim_{n\to\infty}F(-n)=\lim_{n\to\infty}\nu((-\infty,-n))$$

$$=\nu(\phi)=0,$$

这便证明了 iii)。引理证完。

引理6.2 由随机变数ξ的分布函数所引出的$L.S.$测度（未完备化）μ_F等于ξ的概率分布ν，即对每一$B\in\mathbf{B}$，有

$$\mu_F(B)=\nu(B),$$

证明 由引理6.1知，分布函数F满足构造$L.S.$测度的条件，其次令$\mathbf{C}=\{(-\infty,\lambda)$: λ是广义实数$\}$，则$\mathbf{C}$为π族且$R\in\mathbf{C}$，由第二章习题第⑬题，

$$\mu_F((-\infty,\lambda))=F(\lambda)=\nu((-\infty,\lambda)),\ \lambda\text{为实数};$$

$$\mu_F((-\infty,+\infty))=1=\nu((-\infty,+\infty)).$$

由μ_F和ν在π族$\mathbf{C}$上相等，根据定理2.3，它们在$\mathbf{B}=\mathbf{S}(\mathbf{C})$上亦相等。引理证完。

定理6.10 设ξ是概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，又g是$(R,\mathbf{B})$上的可测函数，F是ξ的分布函数，则

$$\int g\circ\xi d\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}g d\mu_F \tag{6.11}$$

这里等号的意义是：当等式一端的积分存在时，则另一端也存在且两者相等。等式右方的积分是g在测度空间$(R,\mathbf{B},\mu_F)$上的$L\text{-}S$积分，而μ_F为F引出的$L.S.$测度。

证明 由定理6.6知ξ为$(X,\mathbf{S},\mu)$到$(R,\mathbf{B})$内的可测变换，由定理6.9，我们有

$$\int_X g\circ\xi d\mu=\int_R g d\nu,$$

其中ν是ξ的概率分布，由引理6.2知，ν等于ξ的分布函数F所引出的$L.S.$测度(未完备化)μ_F，故

$$\int_X g\circ\xi d\mu=\int_R g d\mu_F=\int_{-\infty}^{+\infty}g d\mu_F .$$

定理证完。

定理6.10说明了$g\circ\xi$在$(X,\mathbf{S},\mu)$上的(抽象)积分可以化成g在实数空间R上的$L\text{-}S$积分。g在测度空间$(R,\mathbf{B},\mu_F)$上

的 L-S 积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g d\mu$ 在概率论中通常记为$\int_{-\infty}^{+\infty} g dF$.

设ξ为概率空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的随机变数，若ξ可积，则称ξ的数学期望存在，并定义$\int \xi d\mu$为ξ的数学期望，记为$E(\xi)$。由定理6.10我们有

$$E(\xi) = \int \xi d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dF(\lambda) ,$$

其中F为ξ的分布函数. 根据定理4.9我们立即得出

1）若随机变数ξ的数学期望存在，则$a\xi + b$ 的数学期望亦存在（其中a, b为任意实数）且

$$E(a\xi + b) = aE(\xi) + b .$$

2）若ξ, η为同一概率空间上的随机变数，且$E(\xi)$及$E(\eta)$存在，则$\xi + \eta$的数学期望亦存在且

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta).$$

设随机变数ξ的分布函数为F，k是正整数，若$E(\xi^k)$存在，则我们说ξ的k阶矩存在，以α_k表之。由定理6.10有

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k dF(\lambda).$$

由定理5.13，若α_k存在而j为小于k的一个正整数，则α_j亦存在。至于零阶矩α_0，我们认为它永远存在且等于1，注意α_1就是ξ的数学期望。

当ξ的k阶矩存在时，我们定义ξ的k阶中心矩μ_s如下：

$$\mu_s = E((\xi - \alpha_1)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \alpha_1)^k dF(\lambda)$$

容易算出

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

我们称μ_2为ξ的方差，以符号$D^2(\xi)$表之。方差的平方根常用字母σ来表示。由方差的定义即可推出：若ξ的方差为σ^2，则$a\xi+b$的方差为$a^2\sigma^2$(a,b为任意实数)。

上面我们讨论了一维随机变数的某些结果，下面我们将这些结果推广到n个随机变数的情形。

定理6.11 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，作X到n维实数空间R^n内的变换ξ如下：

$$\xi(x)=(\xi_1(x),\xi_2(x),\cdots,\xi_n(x)),\quad x\in X, \tag{6.13}$$

则ξ为$(X,\mathbf{S})$到$(R^n,\mathbf{B}^n)$内的可测变换。

证明 令$\mathbf{C}$代表R^n上全体形如

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_1<\lambda_1,x_2<\lambda_2,\cdots,x_n<\lambda_n\}$$

的集所组成的集族，其中$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in R^n$。由等式

$$\{x:\ x\in X,\ \xi_1(x)<\lambda_1,\ \xi_2(\lambda)<\lambda_2,\ \cdots,\ \xi_n<\lambda_n\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{n}\{x:\ x\in X,\ \xi_k(x)<\lambda_k\}$$

及$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的可测性知

$$\xi^{-1}(\mathbf{C})\subset\mathbf{S},$$

从而

$$\mathbf{S}(\xi^{-1}(\mathbf{C}))\subset\mathbf{S}. \tag{6.14}$$

由第一章§5知$\mathbf{B}^n=\mathbf{S}(\mathbf{C})$，再由定理6.3，我们有

$$\xi^{-1}(\mathbf{B}^n)=\xi^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{C}))=\mathbf{S}(\xi^{-1}(\mathbf{C})). \tag{6.15}$$

综合(6.14)和(6.15)，立即得到$\xi^{-1}(\mathbf{B}^n)\subset\mathbf{S}$，这便证明了$\xi$为$(X,\mathbf{S})$到$(R^n,\mathbf{B}^n)$内的可测变换。定理证完。

推论 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，又g为$(R^n,\mathbf{B}^n)$上的可测函数，作X上的广义实函数h如下：

$$h(x)=g(\xi_1(x),\xi_2(x),\cdots,\xi_n(x))\quad x\in X$$

则h为$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数。

证明 由定理6.11知，(6.13)所确定的ξ是$(X,\mathbf{S})$至$(R^n,\mathbf{B}^n)$内的可测变换，从h和ξ的定义不难看出$h=g\circ\xi$，故由定理6.7知h为$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数。推论证完。

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，由(6.13)确定的可测变换ξ称为n维随机向量。它在n维波雷集族$\mathbf{B}^n$上产生一个概率测度ν如下：

$$\nu(B)=\mu(\xi^{-1}(B)),\quad 凡B\in\mathbf{B}^n,$$

ν称为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合概率分布。对于任意n个实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$定义

$$F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mu(\{x:\xi_1(x)<\lambda_1,\xi_2(x)<\lambda_2,\cdots,\xi_n(x)<\lambda_n\}),$$

则F为n维实数空间R^n上的函数，称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布函数。当$a_i\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,n$时，

$$\mu(\{x:a_i\leqslant\xi_i(x)<b_i,\ i=1,2,\cdots,n\})$$
$$=s_0-s_1+\cdots+(-1)^n s_n\qquad(6.16)$$

其中

$$s_0=F(b_1,b_2,\cdots b_n),$$

$$s_1=F(a_1,b_2,\cdots,b_n)+F(b_1,a_2,b_3\cdots,b_n)+\cdots$$

$+F(b_1,\cdots b_{n-1},a_n)$,

一般地，把 $F(b_1,\cdots,b_n)$中 k 个 b_i 换作对应的 a_i 一共得到 $\binom{n}{k}$个值，s_k就代表这$\binom{n}{k}$个值之和。

令I代表n维半开闭区间$a_i\leqslant\lambda_i<b_i$，并将（6.16）的右方写作$\mu_F(I)$，类似于引理6.1，我们有下述引理。

引理6.1′ 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为n个随机变数，则它们的联合分布函数具有下列性质：

i）对每一n维半开闭区间I，$\mu_F(I)\geqslant 0$。

ii）$F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$对每一变元为左连续及单调不减。

iii）$\lim\limits_{\lambda_i\to-\infty}F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\lim_{\substack{\lambda_i\to+\infty\\ i=1,2,\cdots,n}}F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=1.$$

证明 完全类似于引理6.1的证明，请读者自证之。

引理6.2′ 由随机变数$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布函数F所引出的$L.S.$测度（未完备化）μ_F等于$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合概率分布v，即对每一$B\in\mathbf{B}^n$，有

$$\mu_F(B)=v(B)$$

证明 类似于引理6.2的证明，读者自证之。

定理6.12 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上的随机变数，ξ由（6.13）式所确定，F为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布函数。又g为(R^n,B^n)上的可测函数，则

$$\int_X g\circ\xi d\mu=\int_{R^n}gdF,$$

这里等号的意义是：当等式一端的积分存在时，则另一端也

存在且两者相等。等式右方积分是g在测度空间$(R^n, \mathbf{B}^n, \mu)$上的L-S积分，而μ为F引出的n维$L.S.$测度。

证明 由定理6.11知ξ为$(X, \mathbf{S}, \mu)$到$(R^n, \mathbf{B}^n)$内的可测变换，由定理6.9我们有

$$\int_X g\cdot\xi d\mu = \int_{R^n} g d\nu$$

其中ν为$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$的联合概率分布，由引理6.2′知，$\nu$等于$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$的分布函数$F$所引出的$n$维$L.S.$测度$\mu_F$，故

$$\int_X g\cdot\xi d\mu = \int_{R^n} g d\mu_F$$

定理证完。

设随机变数ξ_1, ξ_2的联合分布函数为$F(\lambda_1, \lambda_2)$。令$\alpha_{ij} = E(\xi_1^i \xi_2^j)$，其中$i, j$为自然数，则$\alpha_{ij}$称为二维随机向量$(\xi_1, \xi_2)$的$i+j$阶矩，由定理6.12

$$\alpha_{ij} = \int_{R^2} \lambda_1^i \lambda_2^j \, dF(\lambda_1, \lambda_2)$$

显然α_{10}和α_{01}就是ξ_1和ξ_2的数学期望。

与一维的情形相似，我们定义中心矩如下：

$$m_{ij} = E((\xi_1 - \alpha_{10})^i (\xi_2 - \alpha_{01})^j)$$

$$= \int_{R^2} (\lambda_1 - \alpha_{10})^i (\lambda_2 - \alpha_{01})^j dF(\lambda_1, \lambda_2).$$

我们有下列关系：

$$m_{10} = m_{01} = 0,$$

$$m_{20} = D^2(\xi_1), \quad m_{02} = D^2(\xi_2),$$

$$m_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01},$$

$$m_{11}^2 \leqslant m_{20}m_{02}.$$

矩和中心矩的概念可推广到二维以上。

习　　题

①设$(X, \mathbf{S})$是可测空间，f是X到Y内的变换。证明 $\mathbf{U} = \{E: E \subset Y, f^{-1}(E) \in \mathbf{S}\}$ 为Y中的σ代数。

②设f为测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$至可测空间$(Y, \mathbf{U})$内的可测变换，h为X上的广义实函数，可测$[f^{-1}(\mathbf{U}), \mathbf{B}^c]$且可积，则存在$(Y, \mathbf{U}, \mu f^{-1})$上的可积函数$g$，使$h = g \circ f$。

第七章　乘积空间

§1 集的乘积

设X_1和X_2是任意两个集。我们由X_1取一元素x_1，由X_2取一元素x_2，作成一个新的元素(x_1, x_2)，全体这样的(x_1, x_2)所组成的集，称为X_1和X_2的乘积，记为$X_1 \times X_2$，这就是说

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2): x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\}.$$

两集乘积的最熟悉的例子是二维实数空间R^2，它常被看作一维实数空间R和R的乘积。在以下的讨论中，许多地方要用到由这个例子所启示的术语和概念。例如，若$A \subset X_1$，$A_2 \subset X_2$，我们称$X_1 \times X_2$的子集$E = A_1 \times A_2$为矩形。而称构成这个矩形的集合为矩形的边。

下面我们介绍几个与矩形有关的定理。

定理7.1 矩形为空集的充要条件是它至少有一个边为空集。

证明　设$A_1 \times A_2 \neq \phi$，则存在$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$，故$x_1 \in A_1$及$x_2 \in A_2$，因此，$A_1 \neq \phi$，$A_2 \neq \phi$。另一方面，如果$A_1 \neq \phi$，$A_2 \neq \phi$，则存在$x_1 \in A_1$和$x_2 \in A_2$，从而$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$，因此$A_1 \times A_2 \neq \phi$。定理证完。

定理7.2　设$E_1 = A_1 \times A_2$和$E_2 = B_1 \times B_2$是两个非空矩形，则$E_1 \subset E_2$的充要条件是

$$A_1 \subset B_1 \text{和} A_2 \subset B_2.$$

证明 充分性显然。往证必要性，设$E_1 \subset E_2$，若存在$x_1 \in A_1$，$x_1 \bar{\in} B_1$，那么对任一$x_2 \in A_2$，均有$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$和$(x_1, x_2) \bar{\in} B_1 \times B_2$，这与$E_1 \subset E_2$矛盾，因此这样的点不可能存在，从而$A_1 \subset B_1$。同理可证$A_2 \subset B_2$。定理证完。

推论。设$E_1 = A_1 \times A_2$和$E_2 = B_1 \times B_2$是两个非空矩形，则$E_1 = E_2$的充要条件是$A_1 = B_1$，$A_2 = B_2$。

证明 由定理7.1，我们有：$E_1 = E_2$的充要条件为

$$A_1 \subset B_1 \subset A_1; \quad A_2 \subset B_2 \subset A_2,$$

即$A_1 = B_1$；$A_2 = B_2$。推论证完。

定理7.3. 设$\mathbf{P}_1$和$\mathbf{P}_2$分别是X_1和X_2的子集组成的半环，则

$$\mathbf{P} = \{ A_1 \times A_2 : \ A_1 \in \mathbf{P}_1, \quad A_2 \in \mathbf{P}_2 \}$$

为$X_1 \times X_2$中的半环。

证明 因$\phi \in \mathbf{P}_1$，由定理7.2知$\phi \in \mathbf{P}$。其次，设$A_1 \times A_2 \in \mathbf{P}$，$B_1 \times B_2 \in \mathbf{P}$，那么从等式

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

知$\mathbf{P}$对交的运算是封闭的。

更设$A_1 \times A_2 \supset B_1 \times B_2$，往证$(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2)$可以表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交的并。事实上，不妨设$B_1 \times B_2 \neq \phi$，那么由定理7.2我们有$A_1 \supset B_1$及$A_2 \supset B_2$。故此

$$(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2) = [A_1 \times (A_2 \backslash B_2)] \cup [(A_1 \backslash B_1) \times B_2] \qquad (7.1)$$

但$A_1 \backslash B_1$与$A_2 \backslash B_2$可以分别表为$\mathbf{P}_1$与$\mathbf{P}_2$中有限个两两不相交集之并，而(7.1)式右边两矩形不相交，故$(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2)$可表作$\mathbf{P}$中有限个两两不相交的集之并。综合上面已证的结

果知P是半环。定理证完。

设E为$X_1 \times X_2$的子集。x_1为X_1中任一点，我们称集

$$E_{x_1} = \{ x_2: (x_1, x_2) \in E \}$$

为E的由x_1所确定的截口，值得特别强调指出：E_{x_1}不是$X_1 \times X_2$的子集，而是X_2的子集。同样，若x_2为X_2中任一点，集

$$E_{x_2} = \{ x_1: (x_1, x_2) \in E \}$$

称为E的由x_2所确定的截口，E_{x_2}是X_1的子集。E_{x_1}，E_{x_2}有时简称为E的截口。

特别地，当X_1和X_2为实数空间R时，那末$X_1 \times X_2$为R^2，对于R^2的子集E，E_{x_1}是用直线$x_1' = x_1$(x_1'是X_1中的变动坐标)截集合E所得的集在X_2轴上的投影。

设f为定义在$X_1 \times X_2$的子集E上的任意广义实函数，x_1为X_1中任一点，则定义在截口E_{x_1}上由等式

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$$

确定的广义实函数f_{x_1}称为f的由x_1确定的截口。同样对$x_2 \in X_2$，定义在截口E_{x_2}上由等式

$$f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$$

确定的广义实函数f_{x_2}，称为f的由x_2确定的截口。最后，我们来定义投影变换，定义在$X_1 \times X_2$上，由等式

$$p_1(x_1, x_2) = x_1$$

确定的变换p_1为$X_1 \times X_2$到X_1上的一个变换，称为$X_1 \times X_2$到

X_1的投影变换。同样定义$X_1\times X_2$到X_2的投影变换p_2。

特别地，当X_1和X_2为实数空间R时，此时投影变换就是R^2中的投影运算。

前面我们建立的两个集的乘积，可以推广到有限个集，可列个集及任意多个集的乘积的情形。

设$n(>1)$为正整数，X_1，…，X_n为任意n个集，由一切形如$(x_1,\cdots,x_n)$的元素组成的集，其中$x_i\in X_i$，$i=1,2,\cdots,n$

称为此n个集的乘积，并记为$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，或$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i$，亦即

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i=\{(x_1,\ \cdots,\ x_n)\ ;\ x_1\in X_1,\ \cdots,\ x_n\in X_n\}.$$

设$\{X_i\}$ $i=1,2,\cdots$，为任意集序列，由一切形如$(x_1,x_2,\cdots)$的序列组成的集，其中$x_i\in X_i$，$i=1,2,\cdots$，称为此可列个集的乘积，记为$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i$，　亦即

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i=\{(x_1,x_2,\cdots);x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots\}.$$

怎样定义任意多个集的乘积？为此我们再分析一下n个集的乘积。$\bigcup\limits_{i=1}^{n}X_i$的一个元素可以看作为由集$\{1,2,\cdots,n\}$到集$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i$内的一个变换，满足条件：$i$的像属于$X_i$，$(i=1,2,\cdots n)$，同样地$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i$的一个元素也可以看作由集$\{1,2,\cdots\}$至

集$\bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i$内的一个变换，满足条件：$i$ 的 像 属于 X_i，$i=1$，2，…。类似地，我们可以定义任意多个集的乘积。

设T是任一集，对每一$t\in T$，有一集X_t与之对应，我们用$x(\cdot)$表示由集T到集$\bigcup_{t\in T} X_t$内的一个变换。用$x(t)$表示$x(\cdot)$在t处的值，并称它为$x(\cdot)$的t坐标。一切满足条件：$x(t)\in X_t$，$t\in T$的变换$x(\cdot)$所组成的集，称为X_t，$t\in T$的乘积，记为$\bigtimes_{t\in T} X_t$，换句话说

$$\bigtimes_{t\in T} X_t = \{ x(\cdot) : x(t)\in X_t, t\in T \}.$$

由前面的定义，我们知道$\bigtimes_{t\in T} X_t$的元素为T到$\bigcup_{t\in T} X_t$内的变换，满足：对每一$t\in T$，$x(t)\in X_t$。但为方便起见，本章中若不特别声明，符号$x(\cdot)$表示$\bigtimes_{t\in T} X_t$的元素。

对于集的乘积，我们要探讨一下它是否满足结合律，为了书写方便起见，我们仅就有限个集的乘积来叙述。例如：若X_1，X_2和X_3是三个集，则不改变它们的次序我们可以作出三个新的集：$(X_1\times X_2)\times X_3$，$X_1\times(X_2\times X_3)$和$X_1\times X_2\times X_3$，严格说来，此三个乘积是不同的，因为它们并不是由相同的元素组成的，将$((x_1,x_2),x_3)$和(x_1,x_2,x_3)混淆起来是不对的。然而，在上述三个乘积集的每两个之间，存在一个很自然的一一对应关系，这就是使点

$((x_1,x_2),\ x_3)$，$(x_1,(x_2,x_3))$和(x_1,x_2,x_3)互相对应。对于乘积集的那些使我们感兴趣的结构性的性质来说，这个对应关系能使它们保持不变，因此我们以后将上述三个乘

积永远看作是恒等的。又如对七个集的乘积的情形，我们将集$((X_1\times X_2)\times X_3)\times((X_4\times X_5)\times(X_6\times X_7))$的元素

$$(((x_1,x_2),x_3),((x_4,x_5),(x_6,x_7))$$

看作就是集$X_1\times X_2\times X_3\times X_4\times X_5\times X_6\times X_7$的元素

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7).$$

上面所讲的可推广到任意多个集的乘积的情形。这样一来，我们就可以对集的乘积任意地应用结合律。

若A_i是X_i的任意子集，$i=1,2,\cdots,n$,则称集$\bigtimes_{i=1}^{n}A_i$ ($\bigtimes_{i=1}^{n}X_i$的一个子集）为$\bigtimes_{i=1}^{n}X_i$中的矩形。对于任意多个集X_t, $t\in T$的乘积$\bigtimes_{t\in T}X_t$，其中T是可列或非可列无穷集，我们定义矩形为形如$\bigtimes_{t\in T}A_t$的集，其中$A_t\subset X_t$，$t\in T$，且除有限个t以外，均有$A_t=X_t$。A_t, $t\in T$称为矩形$\bigtimes_{t\in T}A_t$的边。若$\bigtimes_{t\in T}A_t$中的A_t除去T中有限个元素$t_1,\cdots,t_n$外，均有$A_t=X_t$，此时我们可将它表为

$$\bigtimes_{t\in T}A_t=\{x(\cdot):x(t_1)\in A_{t_1},\cdots,x(t_n)\in A_{t_n}\}$$

定理7.1—7.3可以推到$\bigtimes_{i=1}^{n}X_i$和$\bigtimes_{t\in T}X_t$的情形，我们仅叙述定理7.3的推广。

定理7.3′ 设$\mathbf{P}_i$为X_i的子集组成的半环$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\mathbf{P}=\{A_1\times\cdots\times A_n:A_i\in\mathbf{P}_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

为$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i$中的半环。

证明 用数学归纳法。当$n=2$时，定理7.3′即定理7.3。设定理7.3′在$n-1$时是正确的。这就是说，$\mathbf{P}'=\{A_1\times\cdots\times A_{n-1}: A_1\in\mathbf{P}_1,\cdots,A_{n-1}\in\mathbf{P}_{n-1}\}$为半环。往证定理在$n$时也正确。事实上，由集的乘积的结合律，$\mathbf{P}$也可表为

$$\mathbf{P}=\{(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n:(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\in\mathbf{P}',$$

$$A_n\in\mathbf{P}_n\},$$

由定理7.3知，$\mathbf{P}$是半环。这说明定理在n时也成立的。定理证完。

定理7.3″ 设$\mathbf{P}_t$是由X_t的子集组成的含X_t的半环，其中$t\in T$，则

$$\mathbf{P}=\{\bigtimes_{t\in T} A_t: A_t\in\mathbf{P}_t, t\in T,\text{且除有限个}t\text{的值外有}A_t=$$

$$X_t\}$$

是$\bigtimes_{t\in T} X_t$中的半环。

证明 显然$\phi\in\mathbf{P}$。设$E_1,E_2\in\mathbf{P}$，且

$$E_1=(\bigtimes_{t\in T_1} A_t)\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_1} X_t);$$

$$E_2=(\bigtimes_{t\in T_2} B_t)\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_2} X_t),$$

其中T_1和T_2是T的有限子集，且$A_t\in\mathbf{P}_t, t\in T_1$，和$B_t\in\mathbf{P}_t, t\in T_2$。令$T'=T_1\cup T_2$，因$P_t$含$X_t$，故$E_1$和$E_2$可改记为

$$E_1=(\bigtimes_{t\in T'} A_t)\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T'} X_t);$$

$$E_2=(\underset{t\in T'}{\times} B_t)\times(\underset{t\in T\setminus T'}{\times} X_t),$$

其中$A_t\in\mathbf{P}_t$，$B_t\in\mathbf{P}_t$，$t\in T'$．易知

$$E_1\cap E_2=(\underset{t\in T'}{\times}(A_t\cap B_t))\times(\underset{t\in T\setminus T'}{\times} X_t), \tag{7.2}$$

对每一$t\in T'$，因$\mathbf{P}_t$是半环，故$A_t\cap B_t\in\mathbf{P}_t$．由(7.2)式我们有$E_1\cap E_2\in\mathbf{P}$．

更设$E_1\subset E_2$，我们有

$$E_2\setminus E_1=[(\underset{t\in T'}{\times} B_t)\setminus(\underset{t\in T'}{\times} A_t)]\times(\underset{t\in T\setminus T'}{\times} X_t), \tag{7.3}$$

不妨设$E_1\neq\phi$，由定理7.2，我们有

$$\underset{t\in T'}{\times} B_t\supset\underset{t\in T'}{\times} A_t\ ,$$

由定理7.3′$(\underset{t\in T'}{\times} B_t)\setminus(\underset{t\in T'}{\cap} A_t)$可表为$\underset{t\in T'}{\times}\mathbf{P}_t$中有限个两两不相交集之并，由(7.3)$E_1\setminus E_2$可表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交集之并，综合上面已证的结果知$\mathbf{P}$是半环．定理证完．

集及函数的截口的概念，也可以推广到任意个集乘积的情形，为书写方便起见，以n个集的乘积的情形为例，设E为$\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i$的子集，$x_1\in X_1$，集

$$E_{x_1}=\{(x_2,\cdots,x_n):(x_1,\cdots,x_n)\in E\}$$

称为E的由x_1确定的截口．显然它是$\overset{n}{\underset{i=2}{\times}}X_i$的子集．设$(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$，集

$$E_{x_1x_2}=\{(x_3,\cdots,x_n):(x_1,\cdots,x_n)\in E\}$$

称为E的由(x_1,x_2)确定的截口，显然它是$\underset{i=3}{\overset{n}{\times}} X_i$的子集。类似地可定义$E$的其他各种截口。

设f为定义在$\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} X_i$的子集$E$上的任一函数，$x_1$为$X_1$中任一点，则定义在截口$E_{x_1}$上由等式

$$f_{x_1}(x_2,x_3,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

确定的函数f_{x_1}称为由x_1确定的f的截口。

又如，设(x_1,x_2)为$X_1\times X_2$上任一点，则定义在截口$E_{x_1x_2}$上由等式

$$f_{x_1x_2}(x_3,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)$$

确定的函数$f_{x_1x_2}$称为由(x_1,x_2)确定的f的截口。

类似地可以定义f的各种截口。

投影变换的概念也可以推广到任意个集的乘积的情形。设$t\in T$，定义在$\underset{t\in T}{\times} X_t$上由等式

$$p_t(x(\cdot))=x_t$$

确定的变换p_t，是$\underset{t\in T}{\times} X_t$到$X_t$上的变换称为$\underset{t\in T}{\times} X_t$到$X_t$的投影变换。

§2. 可测空间的乘积

设$(X_1,\mathbf{S}_1)$及$(X_2,\mathbf{S}_2)$为两个可测空间。$X_1\times X_2$中的矩

形$A_1\times A_2$若满足条件：$A_i\in \mathbf{S}_i$，$i=1,2$，称为可测矩形。由定理7.3，全体可测矩形组成一个半环，由此半环产生的σ代数以$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$表之。$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$为$X_1\times X_2$中的$\sigma$代数，于是我们可以构造一个新的可测空间$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$称它为可测空间$(X_1,\mathbf{S}_1)$，$(X_2,\mathbf{S}_2)$的乘积。而$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$称为$\sigma$代数$\mathbf{S}_1$和$\mathbf{S}_2$的乘积。

定理7.4 设可测空间$(X_1,\mathbf{S}_1)$和$(X_2,\mathbf{S}_2)$的乘积空间为$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$，$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，则对任意固定的$x_1\in X_1$，$E_{x_1}\in\mathbf{S}_2$，而对任意固定的$x_2\in X_2$，$E_{x_2}\in\mathbf{S}_1$。

证明 先设E是可测矩$A_1\times A_2$，此时

$$E_{x_1}=\begin{cases}A_2 & x_1\in A_1\\ \phi & x_1\bar{\in} A_1\end{cases}$$

故当E是可测矩形时，定理成立。

现令$\mathbf{E}$为$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_1$中所有使定理成立的集组成的集族。对任意的$x_1\in X_1$，有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_{x_1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_{x_1},$$

$$(X_1\times X_2\backslash E)_{x_1}=X_2\backslash E_{x_1}$$

由此可知$\mathbf{E}$是σ代数，但$\mathbf{E}$包含$X_1\times X_2$中的一切可测矩形，故$\mathbf{E}=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$。这就证明了对任意$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$及$x_1\in X_1$，均有$E_{x_1}\in\mathbf{S}$。同理可证对任意$x_2\in X_2$，$E_{x_2}\in\mathbf{S}_1$。定理证完。

定理7.5 设f是乘积空间$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$上的可测函数，则对任意固定的$x_1\in X_1$，$f_{x_1}$是$(X_2,\mathbf{S}_2)$上的可测函数；

而对任意固定的 $x_2 \in X_2$，f_{x_2} 是 $(X_1, \mathbf{S}_1)$ 上的可测函数。

证明 设 c 是任一实数，x_1 是 X_1 中任意固定点，则

$$\{x_2 : f_{x_1}(x_2) < c\} = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) < c\}_{x_1},$$

因 $\{x_1, x_2) : f(x_1, x_2) < c\} \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$ 由定理7.4及上式得

$$\{x_2 : f_{x_1}(x_2) < c\} \in \mathbf{S}_2,$$

这便证明了 f_{x_1} 是 $(X_2, \mathbf{S}_2)$ 上的可测函数。类似地可以证明定理的第二个结论。定理证完。

两个可测空间的乘积的理论，可以推广到有限个及任意多个可测空间之乘积。

设 $(X_i, \mathbf{S}_i)$，$i = 1, \cdots, n$ 为 n 个可测空间。$\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} X_i$ 中的矩形 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 若满足条件 $A_i \in \mathbf{S}_i$，$i = 1, \cdots, n$ 称为可测矩形。由定理7.3知全体可测矩形组成半环，由此半环产生的 σ 代数以 $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathbf{S}_i$ 表之。可测空间 $(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} X_i, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathbf{S}_i)$ 称为 $(X_i, \mathbf{S}_i)$，$i = 1, \cdots, n$ 的乘积而 $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathbf{S}_i$ 称为 σ 代数 $\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_n$ 的乘积。

最一般的情形，设有任意个可测空间 $(X_t, \mathbf{S}_t)$，$t \in T$，$\underset{t \in T}{\times} X_t$ 的矩形 $\underset{t \in T}{\times} A_t$ 若满足条件 $A_t \in \mathbf{S}_t$，称为可测矩形，由定理7.3″知全体可测矩形组成半环，由此半环产生的 σ 代数以 $\underset{t \in T}{\times} \mathbf{S}_t$ 表之。$(\underset{t \in T}{\times} X_t, \underset{t \in T}{\times} \mathbf{S}_t)$ 称为 $(X_t, \mathbf{S}_t)$，$t \in T$ 的乘积，而 $\underset{t \in T}{\times} \mathbf{S}_t$ 称为 σ 代数 $\mathbf{S}_t$，

$t\in T$的乘积。

正如§1所述，我们把 $A_1\times A_2\times A_3$，$(A_1\times A_2)\times A_3$及$A_1\times(A_2\times A_3)$中的对应元素视为同一元素，在这种了解下，可测空间的乘积也满足结合律。例如

$$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3=(\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)\times\mathbf{S}_3. \tag{7.4}$$

证明 若$A_i\in\mathbf{S}_i$ $i=1,2,3$，则$A_1\times A_2\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，从而

$$A_1\times A_2\times A_3=(A_1\times A_2)\times A_3\in(\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)\times\mathbf{S}_3,$$

于是

$$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3\subset(\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)\times\mathbf{S}_3. \tag{7.5}$$

反之，令

$$\mathbf{S}=\{A_{12}:A_{12}\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,A_{12}\times A_3\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3,\text{凡}A_3\in\mathbf{S}_3\},$$

易证$\mathbf{S}$是一个σ代数，且包含$X_1\times X_2$中的全体可测 矩形，故$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\subset\mathbf{S}$。另一方面，由$\mathbf{S}$的定义知

$$\mathbf{S}\subset\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,$$

因而$\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$。这就是说

$$(\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)\times\mathbf{S}_3\subset\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3, \tag{7.6}$$

综合(7.5)及(7.6)即得(7.4)式。

上面所讲的可以推广到任意多个可测空间乘积的情形，故今后可对可测空间乘积运用结合律。

设$(\underset{t\in T}{\times}X_t,\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t)$是可测空间$(X_t,\mathbf{S}_t)$，$t\in T$的乘积，下面我们给出与乘积$\sigma$代数$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$有关的几个定理。

设$\mathbf{F}$为$\underset{t\in T}{\times}X_t$中具有下述形式

$$\underset{t\in T}{\times}A_t$$

的集所组成的集族，其中$A_t \in \mathbf{S}_t$且除一个t值外，均有$A_t = X_t$则有

定理7.6 由$\mathbf{F}$所产生的σ代数$\mathbf{S}(\mathbf{F})$等于$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$。

证明 易见$\mathbf{F}$中每一集均为可测矩形，故

$$\mathbf{S}(\mathbf{F})\subset\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t. \tag{7.7}$$

反之，设E为任意可测矩形，不妨设

$$E = A_{t_1}\times\cdots\times A_{t_n}\times\left(\underset{t\in T\setminus\{t_1,\cdots,t_n\}}{\times}X_t\right)$$

其中$A_{t_i}\in\mathbf{S}_{t_i}$，$i=1,2,\cdots n, t_1,\cdots,t_n\in T$。

由关系式

$$E=\left[A_{t_1}\times\left(\underset{t\in T\setminus\{t_1\}}{\times}X_t\right)\right]\cap\cdots\cap\left[A_{t_n}\times\left(\underset{t\in T\setminus\{t_n\}}{\times}X_t\right)\right]$$

知E可表为有限个$\mathbf{F}$中的集之交，故$E\in\mathbf{S}(\mathbf{F})$，从而

$$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t\subset\mathbf{S}(\mathbf{F}). \tag{6.8}$$

综合(7.7)及(7.8)即得$\mathbf{S}(\mathbf{F})=\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$。证完。

定理7.7 设p_t，$t\in T$为$\underset{t\in T}{\times}X_t$上一族投影变换，则$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$是使所有$p_t$，$t\in T$均为可测变换的最小$\sigma$代数。

证明 对每一$t\in T$，$\underset{t\in T}{\times}X_t$上使$p_t$均为可测变换的最小$\sigma$代数为$p_t^{-1}(\mathbf{S}_t)$，从而使所有$p_t$，$t\in T$均可测的最小$\sigma$代数为

$$\mathbf{S}\left(\bigcup_{t\in T}p_t^{-1}(\mathbf{S}_t)\right).$$

容易看出，对任意$t'\in T$

$$p_{t'}^{-1}(\mathbf{S}_{t'}) = \{ A_{t'} \times (\underset{t\in T\setminus\{t'\}}{\times} X_t) : A_{t'} \in \mathbf{S}_{t'} \},$$

故$\mathbf{F} = \bigcup_{t\in T} p_t^{-1}(\mathbf{S}_t)$，由定理7.6知

$$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t = \mathbf{S}(\bigcup_{t\in T} p_t^{-1}(\mathbf{S}_t))$$

这就是说，$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$是使所有$p_t, t\in T$均为可测变换的最小$\sigma$代数。证完。

设T_1是T中任意有限子集，则具有下列形状的集

$$E = A_{T_1} \times (\underset{t\in T\setminus T_1}{\times} X_t)，\text{其中} A_{T_1} \in \underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t,$$

称为$(\underset{t\in T}{\times}X_t\ \underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t,)$中的一个柱体，而$A_{T_1}$称为柱体的底，若$T_1$的元素为$t_1\cdots,t_n$,此时柱体$E$亦可表为

$$E = \{ x(\cdot) : (x(t_1),\cdots,x(t_n)) \in A_{T_1} \}.$$

由σ代数的结合律，有

$$A_{T_1} \times (\underset{t\in T\setminus T_1}{\times} X_t) \in (\underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t) \times (\underset{t\in T\setminus T_1}{\times} \mathbf{S}_t) = \underset{t\in T}{\times} \mathbf{S}_t,$$

因此，柱体必是乘积空间$\{ \underset{t\in T}{\times}X_t, \underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t \}$中的可测集。显然，矩形是一个柱体。特别地，当$T$是可列集$\{1,2,\cdots,n\cdots\}$时，$(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\ \overset{\infty}{\underset{i=1}{\times}}\mathbf{S}_i)$中的每一个柱体$E$均可表为下述形式：

$$E=A_n\times(\bigtimes_{i=n+1}^{\infty}X_i),\ 其中A_n\in\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i,$$

而n是某一自然数(n和A_n依赖于柱体E)。显然每个能表为上述形式的集必是$(\bigtimes_{i=1}^{\infty}X_i,\bigtimes_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i)$中的一个柱体，因此当$T$为可列集时，$(\bigtimes_{i=1}^{\infty}X_i,\ \bigtimes_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i)$中全体柱体所组成集族与集族

$$\{E:E=A_n\times(\bigtimes_{i=n+1}^{\infty}X_i),\ A_n\in\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i,n=1,2,\cdots,\}$$

相等。

定理7.8 若T_1是T的有限子集，则集族

$$\mathbf{S}=\{A_{T_1}\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_1}X_t):A_{T_1}\in\bigtimes_{t\in T_1}\mathbf{S}_t\}$$

为$\bigtimes_{t\in T}X_t$中的σ代数，而$(\bigtimes_{t\in T}X_t,\times_{t\in T}\mathbf{S}_t)$中全体柱体组成$\bigtimes_{t\in T}X_t$中的一个代数$\mathbf{E}$，且

$$\mathbf{S}(\mathbf{E})=\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t.$$

证明 先证第一个结论，设$E_i\in\mathbf{S}$ $i=1,2,\cdots$则

$$E_i=A_{T_1}^{(i)}\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_1}X_t),其中A_{T_1}^{(i)}\in\bigtimes_{t\in T_1}\mathbf{S}_t.$$

但

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{T_1}^{(i)})\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_1}X_t),$$

故从$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{T_1}^{(i)} \in \bigtimes\limits_{t\in T_1} \mathbf{S}_t$，知$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$。再从下式

$$E_1 \setminus E_2 = (A_{T_1}^{(1)} \setminus A_{T_1}^{(2)}) \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_1} X_t)$$

知$E_1 \setminus E_2 \in \mathbf{S}$。最后，从

$$\bigtimes_{t\in T} X_t = (\bigtimes_{t\in T_1} X_t) \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_1} X_t)$$

及$(\bigtimes\limits_{t\in T_1} X_t) \in \bigtimes\limits_{t\in T_1} \mathbf{S}_t$，得到$\bigtimes\limits_{t\in T} X_t \in \mathbf{S}$。这便证明了$\mathbf{S}$为$\sigma$代 数。

其次往证$\mathbf{E}$为代数。设E_1和E_2均属于$\mathbf{E}$，则它们可表 为

$$E_1 = A_{T_1} \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_1} X_t)$$

$$E_2 = B_{T_2} \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_2} X_t)$$

其中T_1和T_2为T的有限子集，且$A_{T_1} \in \bigtimes\limits_{t\in T_1} \mathbf{S}_t$及$B_{T_2} \in \bigtimes\limits_{t\in T_2} \mathbf{S}_t$。 令$T' = T_1 \cup T_2$，并将$E_1$，$E_2$改记为

$$E_1 = A_{T'} \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T'} X_t)$$

$$E_2 = B_{T'} \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T'} X_t)$$

其中$A_{T'} = A_{T_1} \times (\bigtimes\limits_{t\in T'\setminus T_1} X_t)$及$B_{T'} = B_{T_2} \times (\bigtimes\limits_{t\in T'\setminus T_2} X)$均属于$\bigtimes\limits_{t\in T'} \mathbf{S}_t$。因而

$$E_1 \cup E_2 = (A_{1'} \cup B_{1'}) \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T?} X_t)$$

$$E_1\backslash E_2=(A_{T'}\backslash B_{T'})\times(\bigtimes_{t\in T\backslash T'}X_t)$$

注意$A_{T'}\cup B_{T'}$及$A_{T'}\backslash B_{T'}$均属于$\bigtimes_{t\in T'}\mathbf{S}_t$，而$T'$是有限集，故$E_1\cup E_2$及$E_1\backslash E_2$均属于$\mathbf{E}$。显然$\bigtimes_{t\in T}X_t\in\mathbf{E}$，从而$\mathbf{E}$为$\bigtimes_{t\in T}X_t$中的代数。

最后，我们来证明$\mathbf{S}(\mathbf{E})=\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t$。

因可测矩形为柱体，故

$$\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t\subset\mathbf{S}(\mathbf{E}).$$

另外，因柱体为$(\bigtimes_{t\in T}X_t,\ \bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t)$中的可测集，故

$$\mathbf{E}\subset\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t$$

从而$\mathbf{S}(\mathbf{E})\subset\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t$，故$\mathbf{S}(\mathbf{E})=\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t$。证完。

定理7.9 设T为非可列无穷集，则$(\bigtimes_{t\in T}X_t,\ \bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t)$中每一可测集$\mathbf{E}$，均可表为如下形状：

$$E=A_{T_\omega}\times(\bigtimes_{t\in T\backslash T_\omega}X_t)$$

其中T_ω是T的一个可列或有限子集(依赖于$\mathbf{E}$)，而$A_{T_\omega}\in\bigtimes_{t\in T_\omega}\mathbf{S}_t$。

证明 令$\mathbf{S}$为$\bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t$中所有满足定理所述性质的集组成的集族，往证$\mathbf{S}$为$\sigma$代数。设$E_i\in\mathbf{S}$，$i=1,2,\cdots$，则$E_i$可表为

$$E_i=A_{T_\omega^{(i)}}\times(\bigtimes_{t\in T\backslash T_\omega^{(i)}}X_t)$$

其中 $T_\omega^{(i)}$ 是T的一个可列或有限子集，且 $A_{T_\omega^{(i)}} \in \bigtimes_{t\in T_\omega^{(i)}} \mathbf{S}_t$

令$T_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_\omega^{(i)}$，则$T_\omega$是$T$的一个可列或有限子集，利用定理7.8中的类似方法，可将E_i改记为

$$E_i = A_{T_\omega}^{(i)} \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_\omega} X_t), \quad i=1,2,\cdots,n,\cdots,$$

其中$A_{T_\omega}^{(i)} \in \bigtimes_{t\in T_\omega} \mathbf{S}_t$，$i=1,2,\cdots$，故有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{T_\omega}^{(i)}) \times (\bigtimes_{t\in T\setminus T_\omega} X_t),$$

因$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{T_\omega}^{(i)} \in \bigtimes_{t\in T_\omega} \mathbf{S}_t$，所以$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$。可见$\mathbf{S}$对可列并运算是封闭的。同理可证$\mathbf{S}$对余运算也封闭，故$\mathbf{S}$是$\bigtimes_{t\in T} X_t$中的一个$\sigma$代数。易见$\mathbf{S}$包含$\bigtimes_{t\in T} X_t$中全体可测矩形，故$\mathbf{S} = \bigtimes_{t\in T} \mathbf{S}_t$。换言之，$\bigtimes_{t\in T} \mathbf{S}_t$中每一集均具有定理所述性质。证完。

定理7.10 设$(X_i, \mathbf{S}_i)$，$i=1,2\cdots,n$是n个可测空间，且$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(\mathbf{C}_i)$，其中$\mathbf{C}_i$为$X_i$的子集组成的集族，$X_i$可表为$\mathbf{C}_i$中可列个集之并。令

$$\mathbf{C} = \{ C_1 \times \cdots \times C_n;\ C_i \in \mathbf{C}_i,\ i=1,2,\cdots,n \}$$

则$\mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{S}_1 \times \cdots \times \mathbf{S}_n$。

证明 用数学归纳法证明之。

首先证明$n=2$时定理正确。即往证：若$\mathbf{S}_i=\mathbf{S}(\mathbf{C}_i)$，$i=1,2$而

$$\mathbf{C}=\{C_1\times C_2: C_1\in\mathbf{C}_1,\ C_2\in\mathbf{C}_2\}$$

则$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$。事实上，从$\mathbf{C}_1\subset\mathbf{S}_1$及$\mathbf{C}_2\subset\mathbf{S}_2$，得$\mathbf{C}\subset\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，从而

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})\subset\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2. \tag{7.9}$$

再往证相反的包含关系。

设C_1为$\mathbf{C}_1$中任意固定集，考虑X_2中的集族

$$\mathbf{A}_2=\{A_2:A_2\in\mathbf{S}_2,\ C_1\times A_2\in\mathbf{S}(\mathbf{C})\}$$

显然$\mathbf{A}_2$为σ代数且$\mathbf{A}_2\supset\mathbf{C}_2$，故$\mathbf{A}_2=\mathbf{S}_2$。从而对任意的$C_1\in\mathbf{C}_1$及$A_2\in\mathbf{S}_2$均有$C_1\times A_2\in\mathbf{S}(\mathbf{C})$。又设$A_2$为$\mathbf{S}_2$中任意一固定集，考虑$X_1$中的集族

$$\mathbf{A}_1=\{A_1:A_1\in\mathbf{S}_1,\ A_1\times A_2\in\mathbf{S}(\mathbf{C})\}$$

同样，$\mathbf{A}_1$亦为σ代数且$\mathbf{A}_1\supset\mathbf{C}_1$，故$\mathbf{A}_1=\mathbf{S}_1$。因此对任意$A_i\in\mathbf{S}_i$，$i=1,2$均有

$$A_1\times A_2\in\mathbf{S}(\mathbf{C}),$$

从而

$$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\subset\mathbf{S}(\mathbf{C}). \tag{7.10}$$

综合(7.9)及(7.10)即得$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$。

其次，设定理在$n-1$时正确，即若令

$$\mathbf{C}'=\{C_1\times\cdots\times C_{n-1}: C_i\in\mathbf{C}_i,\ i=1,2,\cdots,n-1\}$$

则$\mathbf{S}(\mathbf{C}')=\mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_{n-1}$。往证定理在$n$时也成立。从

$$\mathbf{C}=\{C'\times C_n: C'\in\mathbf{C}',\ C_n\in\mathbf{C}_n\}$$

及定理在$n=2$时的正确性即可有

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\mathbf{S}(\mathbf{C}')\times\mathbf{S}_n=\mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_n.$$ 定理证完。

定理7.10′ 设$(X_t,\ \mathbf{S}_t)$，$t\in T$为一族可测空间，且$\mathbf{S}_t=\mathbf{S}(\mathbf{C}_t)$，其中$\mathbf{C}_t$是$X_t$的子集组成的集族，令

$$\mathbf{C}=\{\underset{t\in T}{\times}C_t:\ \text{除一个}t\text{值有}C_t\in\mathbf{C}_t\text{外，其余的}C_t=X_t\}$$

则由$\mathbf{C}$产生的σ代数$\mathbf{S}(\mathbf{C})$等于$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$。

证明 显然$\mathbf{S}(\mathbf{C})\subset\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$。往证相反的包含关系。设$t_1\in T$，由本章习题第②题，我们有

$$\mathbf{S}[\mathbf{C}_{t_1}\times(\underset{t\in T\setminus\{t_1\}}{\times}X_t)]=\mathbf{S}_{t_1}\times(\underset{t\in T\setminus\{t_1\}}{\times}X_t)$$

易知$\mathbf{S}(\mathbf{C}_{t_1}\times(\underset{t\in T\setminus\{t_1\}}{\times}X_t))\subset\mathbf{S}(\mathbf{C})$。所以对任意$A_{t_1}\in\mathbf{S}_{t_1}$，均有$A_{t_1}\times(\underset{t\in T\setminus\{t_1\}}{\times}X_t)\in\mathbf{S}(\mathbf{C})$，根据定理7.6我们有$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t\subset\mathbf{S}(\mathbf{C})$。因而

$$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t.$$

定理证完。

§3 波雷尔集族及贝尔函数

设R^n为n维实数空间，在第一章§5中我们曾将R^n中全体半开闭区间所产生的σ代数$\mathbf{B}^n$，称为n维波雷尔集族。本节我们将用可测空间乘积的观点，给出n维波雷尔集族的另一定义。和通常一样，用R表示一维实数空间，$\mathbf{B}$表R中的波雷尔集族，那么$(R,\mathbf{B})$为可测空间。令$X_i=R$，$S_i=\mathbf{B}$，$i=1,2,$

$\cdots, n$，则$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i)$为可测空间．显然这里的$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$就是$n$维实数空间$R^n$，而$\sigma$代数$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$称为$R^n$中的波雷尔集族。用$\mathbf{P}$表示$R$中全体半开闭区间组成的集族，则有$\mathbf{B} = \mathbf{S}(\mathbf{P})$。在定理7.10中取$\mathbf{C}_i = \mathbf{P}$，那么定理中的$\mathbf{C}$即为$R^n$中全体半开闭区间组成的集族，由定理7.10知$\mathbf{B}^n = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$，因此这里定义的$n$维波雷尔集族与第一章§5给出的定义是一致的。这样今后我们既可将$\mathbf{B}^n$了解为R^n中全体半开闭区间产生的σ代数，又可了解为n个一维波雷尔集族$\mathbf{B}$的乘积σ代数。

下面我们来定义可列维实数空间，任意维实数空间及其上的波雷尔集族．设$X_i = R$，$\mathbf{S}_i = \mathbf{B}$，$i = 1, 2, \cdots$，那么$X_i$的乘积称为可列维乘积空间，以$R^\omega$记之。而$R^\omega$中的$\sigma$代数$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$称为可列维波雷尔集族，以$\mathbf{B}^\omega$表之。$\mathbf{B}^\omega$中的集则称为可列维波雷尔集．更一般地，设$T$为任意集，其势为$p$，令$X_t = R$，$\mathbf{S}_t = \mathbf{B}$，$t \in T$，则乘积$\mathop{\times}\limits_{t \in T} X_t$称为$p$维实数空间，以$R^p$或$R^T$表之。$R^p$中的$\sigma$代数$\mathop{\times}\limits_{t \in T} \mathbf{S}_t$称为$p$维波雷尔集族，以$\mathbf{B}^p$或$\mathbf{B}^T$表之，而$\mathbf{B}^p$中的集则称为$p$维波雷尔集。

定义在$(R^p, \mathbf{B}^p)$上的实值（或广义实值）可测函数称为实值（或广义实值）贝尔函数或波雷尔可测函数。

§4 由变换产生的σ代数

设X为不空集合，$(Y,\mathbf{U})$为可测空间，f是X到Y内的变换，那么X上使f为可测变换的最小σ代数就是$f^{-1}(\mathbf{U})$，有时我们将此σ代数记为$\mathbf{S}(f)$并称为由f产生的σ代数。

设有n个可测空间$(Y_i,\mathbf{U}_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，而f_i是X到Y_i内的变换$(i=1,2,\cdots,n)$，那末X上使得一切f_i都为可测变换的最小σ代数显然是$\mathbf{S}(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(\mathbf{U}_i))$，称此σ代数为由$f_1$，$f_2$，$\cdots$，$f_n$产生的σ代数，并记为$\mathbf{S}(f_1\cdots,f_n)$。利用变换$f_1,\cdots,f_n$对$X$中每一固定的元素$x$我们可以指定$\bigtimes_{i=1}^{n}Y_i$中的一个元素$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$与之对应，兹以$f$或$(f_1,\cdots,f_n)$表此对应关系，这样我们便得到一个从$X$到$\bigtimes_{i=1}^{n}Y_i$内的变换$f$。

一般地，设T是任意集，对每一$t\in T$，$(Y_t,\mathbf{U}_t)$是一个可测空间，f_t是X到Y_t内的变换，显然X上使得一切f_t，$t\in T$均为可测变换的最小σ代数是$\mathbf{S}(\bigcup_{t\in T}f_t^{-1}(\mathbf{U}_t))$，并称为$f_t$，$t\in T$所产生的σ一代数，记为$\mathbf{S}(f_t,t\in T)$。利用这族变换$f_t,t\in T$，$X$中每一固定的元素$x$，可指定$\bigtimes_{t\in T}Y_t$中的一个元素$y(\cdot)$与之对应，其中$y(\cdot)$满足$y(t)=f_t(x)$，$t\in T$*)，兹以$f$或$(f_t,t\in T)$表此对

*）$\bigtimes_{t\in T}Y_t$中的每个元素是一个变换，正如§1所述，用$y(\cdot)$表之，而$y(t)$则表示$y(\cdot)$在t的值。

应关系，那么我们便得到一个从X到$\underset{t\in T}{\times}Y_t$内的变换。对此变换$f$，有下述引理：

引理7.1 $\mathbf{S}(f_t,t\in T)=f^{-1}(\underset{t\in T}{\times}\mathbf{U}_t)$。

证明 令$\mathbf{F}$为$\underset{t\in T}{\times}Y_t$中具有下述形式：$\underset{t\in T}{\times}A_t$的集组成的集族，其中$A_t\in\mathbf{U}_t$，且除一个$t$值外，均有$A_t=Y_t$。又对每一$t\in T$，设$p_t$为$\underset{t\in T}{\times}Y_t$到$Y_t$上的投影变换。易知

$$\mathbf{F}=\bigcup_{t\in T}p_t^{-1}(\mathbf{U}_t). \tag{7.11}$$

应用定理7.6，定理6.3，定理6.2及定理6.5，可得

$$\begin{aligned}f^{-1}(\underset{t\in T}{\times}\mathbf{U}_t)&=f^{-1}(\mathbf{S}(\mathbf{F}))=\mathbf{S}(f^{-1}(\mathbf{F}))\\&=\mathbf{S}(f^{-1}(\bigcup_{t\in T}p_t^{-1}(\mathbf{U}_t)))=\mathbf{S}(\bigcup_{t\in T}f^{-1}(p_t^{-1}(\mathbf{U}_t)))\\&=\mathbf{S}(\bigcup_{t\in T}(p_t\circ f)^{-1}(\mathbf{U}_t)).\end{aligned} \tag{7.12}$$

显然对每一$t\in T$，有

$$p_t\circ f=f_t. \tag{7.13}$$

综合(7.12)及(7.13)便得

$$f^{-1}(\underset{t\in T}{\times}\mathbf{U}_t)=\mathbf{S}(\bigcup_{t\in T}f^{-1}(\mathbf{U}_t))=\mathbf{S}(f_t,t\in T).$$

引理证完。

定理7.11 设f_t $t\in T$为一族由可测空间$(X,\mathbf{S})$至可测空间$(Y_t,\mathbf{U}_t)$内的变换，则$f=(f_t,t\in T)$是$(X,\mathbf{S})$到$(\underset{t\in T}{\times}Y_t,\underset{t\in T}{\times}\mathbf{U}_t)$

内的可测变换的充要条件是：对每一$t\in T$，f_t为$(X,\mathbf{S})$到$(Y_t,\mathbf{U}_t)$内的可测变换。

证明 充分性：设对每一$t\in T$，f_t为$(X,\mathbf{S})$到$(Y_t,\mathbf{U}_t)$内的可测变换，则$\mathbf{S}(f_t,t\in T)\subset\mathbf{S}$。由引理7.1可知，

$$f^{-1}(\bigtimes_{t\in T}\mathbf{U}_t)=\mathbf{S}(f_t,t\in T)\subset\mathbf{S},$$

故f为$(X,\mathbf{S})$到$(\bigtimes_{t\in T}Y_t,\bigtimes_{t\in T}\mathbf{U}_t)$内的可测变换。

必要性：设f是$(X,\mathbf{S})$到$(\bigtimes_{t\in T}Y_t,\bigtimes_{t\in T}\mathbf{U}_t)$内的可测变换，又$p_t,t\in T$为$\bigtimes_{t\in T}Y_t$上的一族投影变换。由定理7.7知，对每一$t\in T$，$p_t$为$(\bigtimes_{t\in T}Y_t,\bigtimes_{t\in T}\mathbf{U}_t)$到$(Y_t,\mathbf{U}_t)$上的可测变换。显然

$$f_t=p_t\circ f,$$

由定理6.8知，f_t是$(X,\mathbf{S})$到$(Y_t,\mathbf{U}_t)$内的可测变换。定理证完。

上述定理7.11中取$(Y_t,\mathbf{U}_t)=(R,\mathbf{B})$，$t\in T$，便得到概率论中的下述重要定理：

定理7.12 设f_t，$t\in T$是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的一族可测实函数，若T的势为p，则$f=(f_t,t\in T)$为$(X,\mathbf{S})$到$(R^p,\mathbf{B}^p)$内的可测变换。

取$T=\{1,2,\cdots,n\}$，即得定理6.11（参见第六章）。

定理7.13 设$f_t,t\in T$是集X上的一族实值函数，其中T的势为p，又h为可测空间$(X,\mathbf{S}(f_t,t\in T))$上的实值（或广义实值）可测函数，则存在$R^p$上的实值（或广义实值）贝尔函数$g$，便得

$$h=g\circ f,$$

其中$f=(f_t, t\in T)$。

证明 易见对每一$t\in T$，f_t为$\{X, \mathbf{S}(f_t, t\in T)\}$上的可测函数，由定理7.12可知$f$为$\{X, \mathbf{S}(f_t, t\in T)\}$到$(R^p, \mathbf{B}^p)$内的可测变换，故由第六章定理6.9立即得到定理结论。证完。

特别地，当$T=\{1,2,\cdots,n\}$时，有

推论 设$f_1,\cdots,f_n$是集X上的n个实值函数，又设h为可测空间$\{X, \mathbf{S}(f_1,\cdots,f_n)\}$上的实值（或广义实值）可测函数，则存在$R^{(n)}$上的实值（或广义实值）贝尔函数$g$，使得

$$h=g(f_1,\cdots,f_n),$$

亦即对每个$x\in X$，有

$$h(x)=g(f_1(x),\cdots, f_n(x)).$$

§5 两个测度空间的乘积

设$(X_1, \mathbf{S}_1 \mu_1)$和$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$为两个测度空间，本节中我们将定义两个测度空间的乘积。首先，让我们回顾数学分析中的一些事实，设E是二维实数空间R^2中的区域，其图形由垂线$x_1=a$，$x_1=b$和曲线$x_2=\varphi(x_1)$，$x_2=\phi(x_1)$所围成，其中$\varphi\geqslant\phi$。众所周知，区域E的面积等于

$$\int_a^b \{\varphi(x_1)-\phi(x_1)\}\,dx_1.$$

在这样的情况下，差$\varphi(x_1)-\phi(x_1)$为截口E_{x_1}的长度。现在我们将R^2中这种面积度量的方法推广到任意两个测度空间的乘积上，首先介绍一个引理。

引理7.2 设$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$及$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$是两个$\sigma$有限测度空间，又设$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，定义$X_1$上的广义实函数$f_E$及$X_2$上的广

义实函数g_E如下：

$$f_E(x_1)=\mu_2(E_{x_1});\tag{7.14}$$

$$g_E(x_2)=\mu_1(E_{x_2}),\tag{7.15}$$

则f_E和g_E分别为$(X_1,\mathbf{S}_1)$及$(X_2,\mathbf{S}_2)$上的非负可测函数。

证明 我们只就f_E的情形来证明。首先，由定理7.4知函数f_E是有意义的，显然，f_E是非负的，故只需证明 f_E 的可测性。先设$\mu_2(X_2)<+\infty$，令

$$\mathbf{E}=\{E:E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\text{且函数}f_E\text{在}(X_1,\mathbf{S}_1)\text{上可测}\},$$

往证$\mathbf{E}$为λ族。事实上，$X_1\times X_2\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$且

$$f_{X_1\times X_2}=\mu_2(X_2)$$

在$(X_1,\mathbf{S}_1)$上可测，故$X_1\times X_2\in\mathbf{E}$。若$E_1,E_2\in\mathbf{E}$ 且 $E_1\supset E_2$，则

$$f_{E_1\setminus E_2}(x_1)=\mu_2((E_1\setminus E_2)_{x_1})=\mu_2((E_1)_{x_1})$$

$$-\mu_2((E_2)_{x_2})=f_{E_1}(x_1)+f_{E_2}(x_1),$$

因此$f_{E_1\setminus E_2}$为$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的可测函数，这说明$E_1\setminus E_2\in\mathbf{E}$。又设$E_n\in\mathbf{E}$，$n=1,2,\cdots E_n\uparrow$，易知此时有$(E_n)_{x_1}\uparrow$且

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_{x_1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_{x_1},$$

故

$$f_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n}(x_1)=\mu_2\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_{x_1}\right]=\lim_{n\to\infty}\mu_2[(E_n)_{x_1}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}f_{E_n}(x_1),$$

这说明$f_{\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}}$为$(X_1, \mathbf{S}_1)$上的可测函数，从而$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{E}$。综合上述所证的结果，即得证$\mathbf{E}$为λ族。

又当$E = A_1 \times A_2$是$X_1 \times X_2$中的可测矩形时，我们有

$$f_E = \mu_2(A_2)\ \chi_{A_1}$$

故f_E是$(X_1, \mathbf{S}_1)$上的可测函数，从而全体可测矩形均属于$\mathbf{E}$。因全体可测矩形组成π族，由第一章定理1.13及$\mathbf{E}$的定义，我们有

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2.$$

故当μ_2是有限测度时，对任意$E \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$，$f_E$是$(X_1, \mathbf{S}_1)$上的可测函数。

当μ_2是σ有限测度时，不妨设X_2可表为

$$X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_2^{(n)}$$

其中$A_2^{(n)} \in \mathbf{S}_2$，$n = 1, 2, \cdots$两两不相交且$\mu_2\ (A_2^{(n)}) < +\infty$，$n = 1, 2, \cdots$，从而对每一$E \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$，我们有

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

其中$E_n = E \cap (X_1 \times A_2^{(n)})$。易知$E_n \subset X_1 \times A_2^{(n)}$且$E_n$，$n = 1, 2, \cdots$两两不相交，易证

$$(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cap (X_1 \times A_2^{(n)}) = \mathbf{S}_1 \times (\mathbf{S}_2 \cap A_2^{(n)}),$$

由此可见E_n是乘积空间$(X_1\times A_2^{(n)}$，$\mathbf{S}_1\times(\mathbf{S}_2\cap A_2^{(n)}))$的可测集。注意$\mu_2(A_2^{(n)})<+\infty$，由刚才已证的结果$f_{E_n}(x_1)$是$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的可测函数。由关系式$E_{x_1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_{x_1}$及$\{E_n\}$两两不相交，我们有

$$f_E=\sum_{n=1}^{\infty}f_{E_n}\text{。}$$

故f_E为$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的可测函数。引理证完。

设$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$和$(X_2,\mathbf{S}_2,\mu_2)$为两个σ有限测度空间。对每一$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，由引理7.2知，$f_E$是测度空间$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$上的非负可测函数，因此，积分$\int f_E d\mu_1$存在。今定义$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的集函数$\mu$如下：

$$\mu(E)=\int f_E d\mu_1, \tag{7.16}$$

下面我们证明μ是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的测度。事实上，$\mu$显然是非负的，且$\mu(\phi)=0$，又设$E_n\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，$n=1,2,\cdots$，$\{E_n\}$两两不相交，令$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则

$$f_E=\sum_{n=1}^{\infty}f_{E_n}\text{，}$$

根据第4章定理4.10推论3，我们有

$$\mu(E)=\int f_E d\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_{E_n}d\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

这便证明了μ为$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的测度。

同样，对每一$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，若令

$$\mu'(E)=\int g_E d\mu_2, \tag{7.17}$$

其中g_E由(7.15)确定，则μ'亦为$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的测度。特别对于$X_1\times X_2$中每一可测矩形$E=A_1\times A_2$，我们有

$$\mu(E)=\int f_E d\mu_1=\int \mu_2(A_2)\chi_{A_1}d\mu_1=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2),$$

$$\mu'(E)=\int g_E d\mu_2=\int \mu_1(A_1)\chi_{A_2}d\mu_2=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

由上面两式可看出，μ和μ'都是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的$\sigma$有限测度，且它们在可测矩形上相等。因$X_1\times X_2$中全体可测矩形组成半环$\mathbf{P}$，故由引理2.5，$\mu$与$\mu'$在$\sigma$代数$\mathbf{S}(\mathbf{P})=\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上相等。现在我们把$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的$\sigma$有限测度$\mu$（或者$\mu'$亦一样）称为$\mu_1,\mu_2$的乘积测度，并记作$\mu_1\times\mu_2$。由(7.16)和(7.17)知，对每一$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$我们有

$$(\mu_1\times\mu_2)(E)=\int \mu_2(E_{x_1})d\mu_1=\int \mu_1(E_{x_2})d\mu_2,$$

且对每一可测矩形$A_1\times A_2$

$$(\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2),$$

此条件唯一地确定了$\mu_1\times\mu_2$。

测度空间$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, \mu_1\times\mu_2)$称为测度空间$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$和$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$的乘积空间，而$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$和$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$称为$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, \mu_1\times\mu_2)$的分支空间。应该注意，我们这里构造两个测度空间乘积的方法，是在分支测度空间均是σ—有限的假定下给出的，如果两个分支空间中有一个不

是σ有限时，不能用上述方法来构造乘积测度。

例 设$X_1 = X_2$为实数空间R中的单位区间，$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$是单位区间中的全体勒贝格可测集族，令$\mu_1$为勒贝格测度，而$\mu_2$定义如下：

$$\mu_2(E) = E\text{中的点数}，E \in \mathbf{S}_2 .$$

易见μ_2是$\mathbf{S}_2$上的测度但不是σ有限的，令$D = \{(x_1, x_2): x_1 = x_2\}$，易证$D$是$(X_1 \times X_2, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2)$上的可测集，且

$$\int \mu_2(D_{x_1}) d\mu_1 = 1 \text{ 和} \int \mu_1(D_{x_2}) d\mu_2 = 0 .$$

可见将σ有限条件除去后，$\int f_E d\mu_1$不一定等于$\int g_E d\mu_2$。

定理7.14 设$(X_1 \times X_2, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2, \mu_1 \times \mu_2)$是$\sigma$有限测度空间$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$和$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$的乘积，又$E \in \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$，则$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0$的充分必要条件是对几乎所有$x_1$，有$\mu_2(E_{x_1}) = 0$*)。（或对几乎所有$x_2$，有$\mu(E_{x_2}) = 0$。）

证明 由乘积测度$\mu_1 \times \mu_2$的定义，我们有

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int f_E d\mu_1 = \int g_E d\mu_2 . \tag{7.18}$$

如果$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0$，注意$f_E$和$g_E$是非负可测函数，那么从定理4.4知，$f_E = 0$ $a.e.$(对μ_1)及$g_E = 0$ $a.e.$(对μ_2)。换句话说，对几乎所有x_1有$\mu_2(E_{x_1}) = 0$，及对几乎所有x_2有$\mu_1(E_{x_2}) = 0$。

反之，如果对几乎所有x_1有$\mu_2(E_{x_1}) = 0$，那么$f_E = 0$ $a.e.$(对μ_1)，由式(7.18)知$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0$。证完。

---

*)即存在$A_1 \in \mathbf{S}_1$，$\mu_1(A_1) = 0$，使$\{x_1, \mu_2(E_{x_1}) \neq 0\} \subset A_1$.

在研究两个σ有限测度空间$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$和$(X_2,\mathbf{S}_2,\mu_2)$的乘积中，μ_2是σ代数$\mathbf{S}_2$上的测度，它与测度空间$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$之间没有什么联系，但在马尔可夫随机过程及鞅论的研究中，μ_2常是与X_1中的点有关的$\mathbf{S}_2$上的测度，下面我们将仿照前面那样来定义这种测度的乘积。

设$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$为测度空间（不一定σ有限），$(X_2,\mathbf{S}_2)$为可测空间，又$\mu_2(x_1,B_2)$是$X_1\times\mathbf{S}_2$上的二元函数*）且满足下述性质

i) 当x_1固定时，它是$(X_2,\mathbf{S}_2)$上的有限测度，

ii) 当B_2固定时，它是$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的有限可测实函数。

对每一$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，定义$X_1$的实函数$h_E$如下：

$$h_E(x_1)=\mu_2(x_1,E_{x_1}),\ \text{凡}x_1\in X_1. \tag{7.19}$$

和引理7.2的证明完全类似（注意$\mu_2(x_1,X_2)$有限）。可以证明h_E为$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$上的非负可测函数，因此下述积分

$$\int h_E\,d\mu_1$$

存在。今定义$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的集函数$q$如下：

$$q(E)=\int h_E d\mu_1=\int\mu_2(x_1,E_{x_1})d\mu_1,E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2. \tag{7.20}$$

容易证明q是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上测度，特别地，当$\mu_1(X_1)=1$和$\mu_2(x_1,X_2)=1$，对每一$x_1\in X_1$，则有$q(X_1\times X_2)=1$。

---

*）$\mu_2(x_1,B_2)$是$X_1\times\mathbf{S}_2$上的二元函数，是指μ_2的一个"自变量"是X_1中的元素，另一"自变量"是$\mathbf{S}_2$中的元素，为明确起见，我们将函数的"自变量"亦写出来，故这里的$\mu_2(x_1,B_2)$就是函数μ_2而不是μ_2在点(x_1,B_2)上的值。

为了明确起见，有时我们用符号$\int f\mu_1(dx_1)$表示$\int fdu_1$，其中f是$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$上的可测函数。对任一固定的$x_1 \in X_1$，$(X_2, \mathbf{S}_2)$上的可测函数$g$，关于$\mu_2(x_1, B_2)$的积分(若它存在的话)，用符号$\int g\mu_2(x_1, dx_2)$表示之，显然它依赖于$x_1$。

运用这些符号，我们可以将q表为

$$q(E) = \int \mu_1(dx_1) \int \chi_E(x_1, x_2) \mu(x_1, dx_2). \qquad (7.21)$$

§6. 富比尼定理

本节我们研究乘积测度空间上的积分与分支测度空间上的积分之间的关系，先介绍一些符号：

设h是测度空间$(X_1 \times X_2, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2, \mu_1 \times \mu_2)$上的可测函数，若其积分存在，则记为

$$\int hd(\mu_1 \times \mu_2),$$

并称h的二重积分。对每一$x_1 \in X_1$，h_{x_1}表示h的由x_1确定的截口，它是$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$上的可测函数，若$h_{x_1}$能使

$$\int h_{x_1} d\mu_2 = f(x_1)$$

有定义，则习惯上记成为$\int h(x_1, x_2,) d\mu_2$，此时$h(x_1, x_2)$不代表h在点(x_1, x_2)的值。若$\int fd\mu_1$也有意义，则它也可记为

$$\int fd\mu_1 = \int\int h(x_1, x_2) d\mu_2 d\mu_1 = \int d\mu_1 \int h(x_1, x_2) d\mu_2.$$

类似地，令g为定义在X_2上由等式

$$\int h(x_1,x_2)\,d\mu_1=\int h_{x_2}\,d\mu_1=g(x_2)$$

确定的函数，若其积分存在，则记为

$$\int g d\mu_2=\iint h(x_1,x_2)\,du_1 d\mu_2=\int du_2\int h(x_1,x_2)\,d\mu_1.$$

积分$\iint h d\mu_1 d\mu_2$和$\iint h d\mu_2 d\mu_1$称为h的叠积分。

设$E\epsilon\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$，我们用下面的记号表示$h$在$E$上的二重积分和叠积分，亦即$\chi_E h$的重积分和叠积分：

$$\int_E hd(\mu_1\times\mu_2);\quad \iint_E hd\mu_1 d\mu_2;\quad \iint_E hd\mu_2 d\mu_1.$$

定理7.15 （富比尼定理）设$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\mu_1\times\mu_2)$是$\sigma$有限测度空间$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$和$(X_2,\mathbf{S}_2,\mu_2)$的乘积，若$h$满足下述两条件之一：

i) h是与$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\mu_1\times\mu_2)$上的非负可测函数几乎处处相等的广义实函数，

ii) h是$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\mu_1\times\mu_2)$上的可积函数，

则h的两个叠积分均存在，且

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)\,d\mu_2=\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)\,d\mu_2. \tag{7.22}$$

证明 分五步证

1) 设h是乘积空间的特征函数，即

$$h=\chi_E\qquad E\epsilon\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$$

对于固定的$x_1\epsilon X_1$，$\chi_E(x_1,x_2)$为X_2上的函数且等于$\chi_{E_{x_1}}(x_2)$，

因而有

$$\int \chi_E(x_1,x_2)d\mu_2=\mu_2(E_{x_1}),$$

再由(7.16)式得

$$\int \chi_E d(\mu_1\times\mu_2)=(\mu_1\times\mu_2)(E)=\int \mu_2(E_{x_1})d\mu_1$$

$$=\int d\mu_1\int \chi_E(x_1,x_2)d\mu_2.$$

同理可证

$$\int \chi_E d(\mu_1\times\mu_2)=\int d\mu_2\int \chi_E(x_1,x_2)d\mu_1.$$

2）当h是乘积空间的非负简单函数时，设

$$h=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$$

那么，

$$\int h(x_1,x_2)d\mu_2=\sum_{i=1}^{n}a_i\int \chi_{E_i}(x_1,x_2)d\mu_2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_2[(E_i)_{x_1}]=\sum_{i=1}^{n}a_if_{E_i}.$$

因此，$\int h(x_1,x_2)d\mu_2$为$(X_1,\mathbf{S}_1,\mu_1)$上的非负可测函数，从而叠积分$\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2$存在且

$$\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2=\sum_{i=1}^{n}a_i\int f_{E_i}d\mu_1$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i(\mu_1\times\mu_2)(E_i)=\int hd(\mu_1\times\mu_2).$$

同理可证

$$\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)d\mu_1=\int hd(\mu_1\times\mu_2).$$

3）设h是乘积空间上的非负可测函数，这时在乘积空间上取一串非负简单函数$\{h_n\}$使$h_n\uparrow h$，那么由非负可测函数的积分定义及已证明的2)，有

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\lim_{n\to\infty}\int h_n d(\mu_1\times\mu_2)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int d\mu_1\int h_n(x_1,x_2)d\mu_2. \tag{7.23}$$

对每一$x_1\in X_1$，令$f_n(x_1)=\int h_n(x_1,x_2)d\mu_2$，

$$f(x_1)=\int h(x_1,x_2)d\mu_2.$$

当x_1固定时，$h_n(x_1,x_2)$是X_2上的非负可测函数且单调上升于$h(x_1,x_2)$，由单调收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_1)=f(x_1).$$

此外，由序列$\{h_n\}$的性质可知，$\{f_n\}$是单调上升的非负可测函数列，由单调收敛定理及(7.23)有

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x_1)d\mu_1$$

$$=\int f(x_1)d\mu_1=\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2.$$

同理可证$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)d\mu_1$.

4）设h是$X_1\times X_2$上的广义实函数且几乎处处等于一个

非负可测函数$\widetilde{h}$，则

$$\{(x_1,x_2):\ h(x_1,x_2)\neq\widetilde{h}(x_1,x_2)\}\subset E,$$

其中$E\in\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$且$(\mu_1\times\mu_2)(E)=0$。由定理7.14知存在集$A_1$，使得

(a) $A_1\in\mathbf{S}_1$，$\mu_1(A_1)=0$，

(b) 对$x_1\in X_1\setminus A_1$，有$\mu_2(E_{x_1})=0$。

由集E的定义知，对于固定的x_1，恒有：

$$h(x_1,x_2)=\widetilde{h}(x_1,x_2),\quad x_2\in X_2\setminus E_{x_1}.$$

故由(b)知，对于固定的$x_1\in X_1\setminus A_1$，$h(x_1,x_2)$与$\widetilde{h}(x_1,x_2)$在X_2上几乎处处相等，因此有

$$\int h(x_1,x_2)d\mu_2=\int\widetilde{h}(x_1,x_2)d\mu_2,$$

于是

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\int\widetilde{h}d(\mu_1\times\mu_2)=\int d\mu_1\int\widetilde{h}(x_1,x_2)d\mu_2$$
$$=\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2.$$

同理可证

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)d\mu_1.$$

可见在i)的条件下定理成立。

5) 设h为$(X_1\times X_2,\ \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\ \mu_1\times\mu_2)$上的可积函数那么$h^+$，$h^-$分别与$X_1\times X_2$上的非负可测函数几乎处处相等，故由已证得的4)有：

$$\int hd(\mu_1\times\mu_2)=\int h^+d(\mu_1\times\mu_2)-\int h^-d(\mu_1\times\mu_2)$$

$$= \int d\mu_1 \int h^+(x_1, x_2) d\mu_2 - \int d\mu_1 \int h^-(x_1, x_2) d\mu_2$$

$$= \int d\mu_1 [\int h^+(x_1, x_2) d\mu_2 - \int h^-(x_1, x_2) d\mu_2]$$

$$= \int d\mu_1 \int h(x_1, x_2) d\mu_2 .$$

同理可证$\int hd(\mu_1 \times \mu_2) = \int d\mu_2 \int h(x_1, x_2) d\mu_1$. 证完.

注 1：从定理证明中可知，当h是$X_1 \times X_2$上的非负可测函数时，$\int h(x_1, x_2) d\mu_2$是$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$上的非负可测函数。若$h$与$X_1 \times X_2$上非负可测函数几乎处处相等，则$\int h(x_1, x_2)$与$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$上的非负可测函数几乎处处相等。

注 2：若h在$(X_1 \times X_2,\ \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2,\ \mu_1 \times \mu_2)$上可积，那么从

$$\int d\mu_1 \int h(x_1, x_2) d\mu_2 = \int hd(\mu_2 \times \mu_2) < +\infty$$

可知$\int h(x_1, x_2) d\mu_2$为$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$上的可积函数，从而几乎处处有限，故对几乎所有的$x_1$，$h(x_1, x_2)$为$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$上的可积函数。即是说，存在$A_1 \in \mathbf{S}_1$，$\mu_1(A_1) = 0$，使对每个固定的$x_1 \overline{\in} A_1$，$h(x_1, x_2)$是$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$上的可积函数。

下面讨论两个σ有限且完备的测度空间的乘积。设$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$和$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$是两个完备的$\sigma$有限测度空间，$(X_1 \times X_2, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2,\ \mu_1 \times \mu_2)$是它们的乘积空间，读者自然会问$\mu_1 \times \mu_2$作为$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$上的测度是否也完备？一般说来，$\mu_1 \times \mu_2$未必完备，这可由下述例子看出，设$X_1 = X_2$为实数空间$R$中的单位区间，$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$是单位区间中的波雷尔集族，$\mu_1 = \mu_2$是直线上的勒贝格测度，$A_1$是$X_1$的一个不可测子集，$x_2$是$X_2$中任一固定点，$X_1 \times X_2$上的矩形$A_1 \times \{x_2\}$是不可测的，但它是$X_1 \times X_2$上

某零测集的子集，就是说，$\mu_1\times\mu_2$不是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的完备测度。

现在用第二章定理2.5的完备化方法将$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的测度$\mu_1\times\mu_2$完备化，并分别用$\widetilde{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$和$\widetilde{\mu_1\times\mu_2}$表示完备化后的$\sigma$代数和测度，这样便得到一个完备测度空间$(X_1\times X_2, \widetilde{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}, \widetilde{\mu_1\times\mu_2})$，称为$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, \mu_1\times\mu_2)$的完备化测度空间。在此完备化测度空间中，富比尼定理仍然成立，但其证明须借助于下述引理。先介绍一个与此引理有关的术语。

设$(X, \mathbf{S}, \mu)$为测度空间，将σ代数$\mathbf{S}$上的测度μ用定理2.5的完备化方法可得$\widetilde{\mathbf{S}}$上的完备测度$\widetilde{\mu}$，这时称测度空间$(X, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mu})$为测度空间$(X, \mathbf{S}, \mu)$的完备化测度空间。

引理7.3 设$(X, \mathbf{S}, \mu)$为测度空间，$(X, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mu})$为它的完备化测度空间。$f$为$X$上的广义实函数，则$f$是$(X, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mu})$上的可测函数的充要条件为：存在$(X, \mathbf{S}, \mu)$上的可测函数$g$，使得

$$f(x)=g(x), \quad \text{凡} x\in X\setminus A,$$

其中$A\in\mathbf{S}$且$\mu(A)=0$。

证明 必要性：设f为$(X, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mu})$上的可测函数，记实数空间中全体有理数所组成的集为$D$，又令

$$E_r=\{x: f(x)<r\}, \quad r\in D,$$

那么$E_r\in\widetilde{\mathbf{S}}$，故$E_r$可表为

$$E_r=F_r\cup N_r$$

其中$F_r\in\mathbf{S}$；$N_r\subset A_r$，$A_r\in\mathbf{S}$，$\mu(A_r)=0$。

令$\bigcup\limits_{r\in D}A_r=A$，则从$D$是可列集知$A\in\mathbf{S}$且$\mu(A)=0$，今构造函数

g如下

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\bar{\in} A \\ 0 & x\in A \end{cases}.$$

那么由下式

$$\{x: g(x)<r\}=(\{x: g(x)<r\}\cap A)$$
$$\cup(\{x: g(x)<r\}\cap A'),$$

及

$$\{x: g(x)<r\}\cap A=\begin{cases} \phi & \text{当}r\leqslant 0\text{时} \\ A & \text{当}r>0\text{时}; \end{cases}$$

$$\{x: g(x)<r\}\cap A'=\{x: f(x)<r\}\cap A'$$
$$=(F_r\cup N_r)\cap A'=F_r\cap A'$$

并注意到$A\in \mathbf{S}$, $F_r\cap A'\in\mathbf{S}$，便知g是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数，这个g即为所求的可测函数。

充分性：若存在$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测函数g，使得

$$f(x)=g(x),\ \text{凡}x\in X\setminus A$$

其中$A\in\mathbf{S}$且$\mu(A)=0$。则对任一实数c，

$$\{x: f(x)<c\}=[\{x: g(x)<c\}\cap A']\cup$$
$$[\{x: f(x)<c\}\cap A].$$

显然$\{x: g(x)<c\}\cap A'\in\mathbf{S}$, $\{x: f(x)<c\}\cap A\subset A$，故

$$\{x: f(x)<c\}\in\widetilde{\mathbf{S}},$$

即f为$(X,\widetilde{\mathbf{S}},\widetilde{\mu})$上的可测函数。证完。

定理7.16 设$\{X_1\times X_2,\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2},\overline{\mu_1\times\mu_2}\}$是$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\mu_1\times\mu_2)$的完备化测度空间，又$h$为$(X_1\times X_2,\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$,

$\overline{\mu_1\times\mu_2}$)上的非负可测函数或可积函数，则

$$\int h d\overline{\mu_1\times\mu_2}=\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2=\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)d\mu_1$$

证明 由引理7.3知存在 $(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, \mu_1\times\mu_2)$ 上的可测函数g，使$h=g$，$a.e.$（对$\mu_1\times\mu_2$），又由定理7.15及定理7.14我们有

$$\int hd(\overline{\mu_1\times\mu_2})=\int gd(\overline{\mu_1\times\mu_2})=\int gd(\mu_1\times\mu_1)$$

$$=\int d\mu_1\int g(x_1,x_2)d\mu_2=\int d\mu_1\int h(x_1,x_2)d\mu_2.$$

同理 $\int hd(\overline{\mu_1\times\mu_2})=\int d\mu_2\int h(x_1,x_2)d\mu_1$。证完。

利用上述理论，可给出二维勒贝格可测集，测度及可测函数的定义。设R为实数空间，$\widetilde{\mathbf{B}}$是R上全体勒贝格可测集组成的σ代数，L为勒贝格测度。若测度空间 $(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathbf{S}_2, \mu_2)$ 均为 $(R, \widetilde{B}, L)$，那么$\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$中的集称为二维勒贝格可测集，$\overline{\mu_1\times\mu_2}$称为二维勒贝格测度，而$(X_1\times X_2, \overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}, \overline{\mu_1\times\mu_2})$上的可测函数称为二维勒贝格可测函数。如前所述，二维勒贝格测度并非两个一维勒贝格测度的乘积，而是这个乘积测度的完备化测度。

对于(7.21)式确定的测度q有类似于定理7.15的结论。

定理7.17 设q如(7.21)所给出，且h满足下述条件之一：

i) h与$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, q)$上某一非负可测函数几乎处处相等，

ii) h是$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, q)$上的可积函数。

则

$$\int h dq = \int \mu_1(dx_1)\int h(x_1,x_2)\mu_2(x_1,dx_2).$$

这定理的证明与定理7.15完全相似，读者试自证之，从证明中，不难得出，若h是$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, q)$上的非负可测函数，则$\int h(x_1,x_2)\mu(x_1,dx_2)$是$(X_1, \mathbf{S}_1, \mu_1)$上的非负可测函数。又当$h$是$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, q)$上的可积函数时，对几乎所有$x_1$，$h(x_1, x_2)$为$(X_2, \mathbf{S}_2, \mu(x_1, A_2))$上的可积函数。

§7 有限个测度空间的乘积

首先考虑三个σ有限测度空间$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$，$i=1,2,3$，依§5所述，我们可作$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的测度$\mu_1\times\mu_2$，然后再作$\mu_1\times\mu_2$与$\mu_3$的乘积，得到$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3$上的测度$(\mu_1\times\mu_2)\times\mu_3$，若$A_1\times A_2\times A_3$为$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3$中的可测矩形，则

$$(\mu_1\times\mu_2)\times\mu_3(A_1\times A_2\times A_3) =$$

$$\{(\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2)\}\mu_3(A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3).$$

类似地，可作出$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3$上的测度$\mu_1\times(\mu_2\times\mu_3)$，它在可矩形$A_1\times A_2\times A_3$上亦满足

$$\mu_1\times(\mu_2\times\mu_3)(A_1\times A_2\times A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3).$$

因此不论按什么次序结合三个测度的乘积，所得到的都是σ有限测度并在可测矩形上相等，从而在$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3$上相等。可见三个测度的乘积与结合次序无关，于是可记作$\mu_1\times\mu_2\times\mu_3$或$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{3}\mu_i$。

设$E\in \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_3$，由§5中两个测度乘积定义有

$$(\mu_1\times\mu_2\times\mu_3)(E)=\int d\mu_3\int\chi_E\, d(\mu_1\times\mu_2)$$

$$=\int d\mu_3\int d\mu_2\int\chi_E d\mu_1,$$

再由两测度空间乘积的富比尼定理知，上式最后一项叠积分的先后次序是没有关系的。

其次，利用数学归纳法可将上述结论推广到任意有限多个σ有限测度空间的乘积。

定理7.18 设$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)$，$i=1,2,\cdots,n$是n个σ有限测度空间，对每一$E\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，令

$$\mu(E)=\int d\mu_1\int d\mu_2\cdots\int\chi_E d\mu_n \tag{7.24}$$

则μ是$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$上的$\sigma$有限测度，且对$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$中每一可测矩形$A_1\times\cdots\times A_n$有

$$\mu(A_1\times\cdots\times A_n)=\prod_{i=1}^{n}\mu_i(A_i)$$

上述条件唯一地确定了μ。

证明 定理7.18显然是本节定理7.20的特殊情形，故这里省略它的证明。

注1：(7.24)式中的叠积分与次序无关。事实上，任意改变(7.24)式中叠积分的次序，定理7.18仍成立，因此它和μ在可测矩形上相等，从而在$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$上相等。

注2：从(7.24)式不难看出$\bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i$与$\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$的结合次序无关，故可将$\bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i$看作每次取两个因子的连乘积：

$$\bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i=((\mu_1\times\mu_2)\times\mu_3\times\cdots)\times\mu_n$$

亦可看作：

$$\bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i=\bigtimes_{K=0}^{m-1}\Big(\bigtimes_{i=n_K+1}^{n_{K+1}}\mu_i\Big)，其中0=n_0<n_1<\cdots<n_m=n$$

由(7.24)式确定的测度μ称为测度$\mu_1,\cdots,\mu_n$的乘积，记作$\bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i$. 而测度空间$(\bigtimes_{i=1}^{n}X_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i)$称为测度空间$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i), i=1,2,\cdots,n$的乘积。

富比尼定理亦可推广到n个测度空间乘积的情形。

定理7.19 设$(\bigtimes_{i=1}^{n}X_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i)$是$n$个$\sigma$有限测度空间$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i), i=1,2,\cdots,n$的乘积空间，且$h$满足下列条件之一：

1) h与$(\bigtimes_{i=1}^{n}X_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i)$上某一非负可测函数$a.e.$相等，

2) h是$(\bigtimes_{i=1}^{n}X_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, \bigtimes_{i=1}^{n}\mu_i)$上的可积函数，

则

i) $\int h d(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\mu_i) = \int d\mu_1 \int \cdots \int h d\mu_n$,

ii) $\int h d(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\mu_i) =$

$$\int d(\underset{i=1}{\overset{n_1}{\times}}\mu_i) \int d(\underset{i=n_1+1}{\overset{n_2}{\times}}\mu_i) \cdots \int h d(\underset{i=n_{m-1}+1}{\overset{n}{\times}}\mu_i),$$

其中$1<n_1<\cdots<n_{m-1}<n$. 上两式中右边的叠积分的次序是无关的。

证明 结论i)是本节定理7.21的特殊情形. 结论ii) 请读者自证。

与二维情形一样，我们亦可用下述方法给出$(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}X_i, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\mathbf{S}_i)$上的测度。

定理7.20 设$(X_i, \mathbf{S}_i)$, $i=1,\cdots,n$ $(n\geqslant 2)$是n个可测空间，μ_1是$(X_1, \mathbf{S}_1)$上的测度，$\mu_i(x_1, \cdots x_{i-1}, B_i)$ $(1<i\leq n)$是$X_1\times\cdots\times X_{i-1}\times\mathbf{S}_i$上的函数，且满足

1) 当$x_1, \cdots, x_{i-1}$固定时，$\mu_i(x_1,\cdots,x_{i-1}, B_i)$是$(X_i, \mathbf{S}_i)$上的有限测度。

2) 当$B_i\in\mathbf{S}_i$固定时，$\mu_i(x_1, \cdots x_{i-1}, B_i)$是$(X_1\times\cdots\times X_{i-1}, \mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_{i-1})$上的可测函数，则对每一$E\in\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\mathbf{S}_i$，令

$$q_n(E) = \int\mu(dx_1)\int\mu_2(x_1, dx_2)\int\cdots\int\chi_E\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n) \tag{7.25}$$

则q_n是$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$上的测度. 特别当$\mu_1, \mu_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, B_i)$ $i=2, \cdots, n$均为概率测度时，则q_n也是概率测度。

定理7.21 设q_n如(7.25)式所给出，且h满足下述条件之一：

1) h与$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, q_n)$上某一非负可测函数$a.e.$相等，

2) h是$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, q_n)$上的可积函数。

则

$$\int h dq_n = \int \mu_1(dx_1) \int \mu_2(x_1 dx_2) \cdots \int h\mu_n(x_1, \cdots x_{n-1}, dx_n). \quad (7.26)$$

下面一并给出定理7.20及定理7.21的证明。首先假定定理7.20成立，往证定理7.21. 用数学归纳法证明：当$n=2$时定理7.21即定理7.17，故定理成立。假设定理在n-1时成立，今证定理在n时亦成立。由(7.25)易见.

$$q_n(E) = \int dq_{n-1} \int \chi_E \mu_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

将定理7.17用于测度空间$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n-1}X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n-1}\mathbf{S}_i, q_{n-1})$与$(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, B_n))$的乘积$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i, q_n)$即得

$$\int h dq_n = \int dq_{n-1} \int h\mu_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

由h的假定及上式知

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1})=\int h\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n)$$

与$(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\ \overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}\mathbf{S}_i,\ q_{n-1})$上的非负可测函数$a.e.$相等或为可积函数，由归纳法假定可知

$$\int hdq_n=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\cdots\int h\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},$$

$dx_n)$.定理7.21证完.

下面回过来证明定理7.20(用数学归纳法)。当n=2时，(7.25)式即(7.21)式，故定理7.20成立。假定定理在n-1时成立，往证定理在n时成立。将定理7.17的注用于

$(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\ \overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}\mathbf{S}_i)$，$(X_n,\mathbf{S}_n)$及$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},\ B_n)$即知

$$f_E(x_1,\cdots,x_{n-1})=\int\chi_E\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n)$$

为$(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\ \overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}}\mathbf{S}_i)$上的非负可测函数。由归纳法假定及定理7.21的证明可知(7.26)式在n-1时正确，故

$$q_n(E)=\int\mu_1(dx)\int\cdots\cdots\int\chi_E\mu_n(x_2,\cdots x_{n-1},dx_n)$$

$$=\int f_E(x_1,\cdots,x_{n-1})dq_{n-1},$$

由§5知$q_n(E)$是$(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\times}}\mathbf{S}_i)$上的测度。证完。

§5 可列个测度空间的乘积

本节中我们将有限个测度空间乘积的理论推广到可列个乘积的情形。我们只讨论可列个概率空间的乘积，对于有限测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$，只要$\mu(X)\neq 0$，我们总可以将每个可测集的测度除以$\mu(X)$，从而得到一个概率测度。但由于“1”这个数在乘积(特别是无限个因子的乘积)的形式中占有特别重要的地位，所以$\mu(X)=1$绝不是一个普通的条件而已。

设$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)\ i=1,2,\cdots$为概率空间序列，用$\mathbf{E}$表示$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i,\ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i)$中全体柱体组成的集族，正如本章§2中所指出，$\mathbf{E}$是$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i$中的代数，$\mathbf{S}(\mathbf{E})=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i$，且每一$E\in\mathbf{E}$，均可表为下述形式

$$E=A_n\times(\mathop{\times}\limits_{i=n+1}^{\infty}X_i)$$

其中n为自然数，而$A_n\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，令

$$\mu(E)=(\mu_1\times\mu_2\times\cdots\cdots\times\mu_n)(A_n) \tag{7.27}$$

这样我们便得到一个$\mathbf{E}$上的集函数。

引理7.4 由(7.27)式所确定的集函数为$\mathbf{E}$上的概率测度。

引理7.4是后面引理7.5的特殊情形，故这里我们省略其证明。由引理7.4及第二章中的测度扩张定理，我们立即得

用下述定理。

定理7.22 设$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$ $i=1,2,\cdots$为概率空间序列，则σ代数$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i$上存在唯一的概率测度$\mu$，使得对$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i$中每一柱体$E=A_n\times(\mathop{\times}\limits_{i=n+1}^{\infty}X_i)$有

$$\mu(E)=(\mu_1\times\cdots\cdots\times\mu_n)(A_n),$$

其中$A_n\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$ $n=1,2,\cdots\cdots$。

测度μ称为测度μ_i的乘积测度，并记为$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mu_i$，而测度空间

$$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i,\ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i,\ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}\mu_i)$$

称为测度空间$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$ $i=1,2,\cdots\cdots$的乘积空间。

定理7.22中，测度空间族的指标集为全体正整数。当指标集为任意可列集T时，只要在T与全体正整数之间建立任意一一对应关系，这样定理7.22便可推广到指标集为任意可列集的情形。

定理7.22′ 设$(X_t, \mathbf{S}_t, \mu_t)$，$t\in T$为一族概率空间，其中$T$是任意可列集，则$\sigma$代数$\mathop{\times}\limits_{t\in T}\mathbf{S}_t$上存在唯一的概率测度$\mu$，使对每一柱体$E=A_{T_n}\times(\mathop{\times}\limits_{t\in T\setminus T_n}X_t)$，有

$$\mu(E)=(\mu_{t_1}\times\cdots\times\mu_{t_n})(A_{T_n})$$

其中$A_{T_n}\in\mathop{\times}\limits_{t\in T_n}\mathbf{S}_t$，$T_n$是$T$中的有限子集，其元素为$t_1,\cdots,t_n$。

测度μ称为测度$\mu_t, t\in T$的乘积测度，并记为$\bigtimes_{t\in T}\mu_t$，而测度空间$(\bigtimes_{t\in T}X_t, \bigtimes_{t\in T}\mathbf{S}_t, \bigtimes_{t\in T}\mu_t)$称测度空间$(X_t, \mathbf{S}_t, \mu_t)$，$t\in T$的乘积空间。

下面我们转入研究马尔可夫随机过程所需的测度乘积。设$(X_i, \mathbf{S}_i)\ i=1,2,\cdots$为可测空间序列，$\mu_1$是$(X_1, \mathbf{S}_1)$上的概率测度，又$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$是$X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\times\mathbf{S}_n$上的函数*)，$n=2,3,\cdots$，满足性质：

i) 当$x_1,\cdots,x_{n-1}$固定时，$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$为$(X_n,\mathbf{S}_n)$上的概率测度。

ii) 当$B_n\in\mathbf{S}_n$固定时，$\mu_n(x_1,\cdots x_{n-1},B_n)$为可测空间$(X_1\times\cdots\times X_{n-1}, \mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_{n-1})$上的可测函数。

仍用$\mathbf{E}$表示$(\bigtimes_{i=1}^{\infty}X_i, \bigtimes_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i)$中全体柱体组成的代数。对每一

$$E=A_n\times(\bigtimes_{i=n+1}^{\infty}X_i)$$

其中$A_n\in\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，令

$$q(E)=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n), \qquad (7.28)$$

这样便得到$\mathbf{E}$上的一个集函数q。

---

*)本节中，我们用B_n表示$\mathbf{S}_n$中的集，而A_n表示$\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$中的集。

引理7.5 由(7.28)式确定的集函数q为代数**E**上的概率测度。

证明： 首先引进一些符号。对每一$n\geq 1$我们用$X^{(n)}$表示$\bigtimes_{i=n+1}^{\infty} X_i$，用$\mathbf{E}^{(n)}$表示$X^{(n)}$中全体柱体所组成的集族。类似于集函数$q$，我们可以用$\mu_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,B_{n+1})$，$\mu_{n+2}(x_1,\cdots,x_{n+1},B_{n+2})$，$\cdots$构造$\mathbf{E}^{(n)}$上的集函数$q^{(n)}$。对$E\in\mathbf{E}$，容易看出由$x_1,\cdots,x_n$决定的截口$E_{x_1\ldots x_n}$属于$\mathbf{E}^{(n)}$，且

$$q(E)=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$
$$\int q^{(n)}(E_{x_1\ldots x_n})\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

下面分三步来证明引理：

I)往证(7.28)式所确定的集函数q是不含混的。即若$E\in\mathbf{E}$，且$E=A_n\times X^{(n)}$和$E=A_m\times X^{(m)}$，其中$A_n\in\bigtimes_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，$A_m\in\bigtimes_{i=1}^{m}\mathbf{S}_i$，则有$q(A_n\times X^{(n)})=q(A_m\times X^{(m)})$。

不妨设$m>n$，此时

$$A_m=A_n\times X_{n+1}\times\cdots\cdots\times X_m$$

由q的定义及$\mu_n(x_1,\cdots x_{n-1},B_n)$的性质，有

$$q(A_m\times X^{(m)})=\int\mu_1(dx_1)\int\cdots\int\chi_{A_m}(x_1,\cdots,x_m)$$
$$\mu_m(x_1,\cdots,x_{m-1},dx_m)$$
$$=\int\mu_1(dx_1)\int\cdots\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)\chi_{X_{n+1}}(x_{n+1})\cdots$$

$$\chi_{X_m}(x_m)\mu_m(x_1,\cdots,x_{m-1},dx_m)$$

$$=\int\mu_1(dx_1)\int\cdots\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n)$$

$$=q(A_n\times X^{(n)}),$$

这就是说集函数q是不含混的。

Ⅱ)往 证 q 为**E**上的有限可加测度，且$q(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i)=1$。事实上，$q$显然是非负的，注意若$A_n\times X^{(n)}=\phi$，其中$A_n\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，则必有$A_n=\phi$。从而不难看出$q(\phi)=0$。因为$\mu_1,\cdots,\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$均为概率测度，由$q$的定义，立即得到$q(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i)=1$。

其次往证，q在**E**上具有有限可加性。设$E_1,\cdots,E_n\in$**E**，且两两不相交，不失一般性，我们可以设

$$E_j=A_N^{(j)}\times X^{(N)},\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中$A_N^{(j)}\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{N}\mathbf{S}_i$，$j=1,2,\cdots,n$。显然$A_N^{(j)}$，$j=1,2,\cdots,n$亦是两两不相交的，由定理7.20，我们有

$$q(\bigcup_{j=1}^{n}E_j)=q[(\bigcup_{j=1}^{n}A_N^{(j)})\times X^{(N)}]$$

$$=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_N^{(j)}}(x_1,\cdots,x_N)\mu_N(x_1,\cdots,x_{N-1},dx_N)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_N^{(j)}}(x_1,\cdots,x_N)\mu_N(x_1,\cdots,x_{N-1},dx_N)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}q(E_j),$$

故q具有有限可加性。

Ⅱ)往证 q 在 $\mathbf{E}$ 上具有完全可加性。由第二章定理 2.9，我们只须证明："对任意$E_n\in\mathbf{E}$，$n=1,2,\cdots$，且 $E_n\downarrow$及$\lim\limits_{n\to\infty}q(E_n)>0$，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\neq\phi$"，不失一般性，我们可以设

$$E_1=A_1\times X^{(1)}$$
$$E_2=A_2\times X^{(2)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_n=A_n\times X^{(n)}$$
$$\cdots\cdots$$

其中 $A_n\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mathbf{S}_i$，由$q$及$q^{(1)}$的定义，我们有

$$q(E_n)=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n)$$

$$=\int q^{(1)}[(E_n)_{x_1}]\mu_1(dx_1).$$

对每一$x_1\in X_1$，令$\Phi_n(x_1)=q^{(1)}[(E_n)_{x_1}]$，那么$\Phi_n$为$(X_1,\mathfrak{S}_1,\mu_1)$上的非负测可函数，且

$$\Phi_n(x_1)=\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

注意$\Phi_n(x_1)$亦可表为

$$\Phi_n(x_1)=\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_n\times X_{n+1}}(x_1,\cdots,x_{n+1})\mu_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,dx_{n+1})$$

及$A_n\times X_{n+1}\supset A_{n+1}$，我们有

$$\Phi_1(x_1)\geqslant\Phi_2(x_1)\geqslant\cdots,\qquad 凡x_1\in X_1.$$

故存在X_1上的非负可测函数Φ，使$\Phi_n(x_1)\downarrow\Phi(x_1)$，对每一$x_1\in X_1$成立。由控制收敛定理，我们有

$$\int\Phi(x_1)\mu(dx_1)=\int\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x_1)\mu_1(dx_1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\Phi_n(x_1)\mu_1(dx_1)=\lim_{n\to\infty}q(E_n)>0,$$

故有$\eta_1\in X_1$，使$\Phi(\eta_1)>0$，因而$\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(\eta_1)>0$。往证$\eta_1\in A_1$，

事实上，若$\eta_1\bar{\in}A_1$，则$\Phi_1(\eta_1)=0$，从而，$\Phi_n(\eta_1)=0$，$n=1,2,\cdots$这与$\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(\eta_1)>0$矛盾．综合上面所证的事实，并利用

$\Phi_n(\eta_1)$的定义，我们得到下述结论"存在$\eta_1\in A_1$，使$\lim\limits_{n\to\infty}q^{(1)}$
$[(E_n)_{\eta_1}]>0$"。

以η_1截$E_2,\cdots,E_n,\cdots$得到$X^{(1)}$中的一串单调下降柱体，$(E_n)_{\eta_1}$，$(n\geqslant 2)$且$\lim\limits_{n\to\infty}q^{(1)}[(E_n)_{\eta_1}]>0$，因此前面施之于

$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty}X_i$，$\{E_n\}$和$q$的方法可以同样地用之于$X^{(1)}$，$\{(E_n)_{\eta_1}\}$和$q^{(1)}$，于是得到$X_2$中的一点$\eta_2$，使$(\eta_1,\eta_2)\in A_2$，且以$(\eta_1,\eta_2)$截$E_3$，$E_4$，…得到$X^{(2)}$中的一串单调下降柱体$(E_n)_{(\eta_1,\eta_2)}(n\geqslant 3)$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}q^{(2)}[(E_n)_{(\eta_1,\eta_2)}]>0$。

用归纳法，我们可以得到一串$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\cdots$，其中$\eta_m\in X_m$，$(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in A_m$，且以$(\eta_1,\cdots,\eta_m)$截$E_{m+1},E_{m+2},\cdots$得到$X^{(m)}$中一串单调下降的柱体$(E_n)_{(\eta_1,\cdots,\eta_m)}(n>m)$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}q^{(m)}$
$[(E_n)_{(\eta_1,\cdots,\eta_m)}]>0$，令$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$，因为对每一自然数$n$，我们有$(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in A_n$，$\eta_n\in X_n$及$E_n=A_n\times X^{(n)}$，

$n=1,2,\cdots$，故$\eta\in E_n$，$n=1,2,\cdots$，从而$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\neq\phi$。这就证明了

q在$\mathbf{E}$上具有完全可加性。引理证完。

由引理7.5及测度扩张定理，我们立即得到下述定理。

定理7.23 设$(X_i,\mathbf{S}_i)$ $i=1,2,\cdots$为可测空间序列，μ_1为$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的概率测度，又$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$为$X_1\times\cdots\times X_{n-1}\times\mathbf{S}_n$上的函数，$n=2,3,\cdots$满足条件：

i) 当$x_1,\cdots,x_{n-1}$固定时，$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$为$(X_n,\mathbf{S}_n)$上的概率测度，

ii) 当$B_n\in\mathbf{S}_n$固定时，$\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},B_n)$为可测空间

$(X_1\times\cdots\times X_{n-1}, \mathbf{S}_1\times\cdots\times\mathbf{S}_{n-1})$上的可测函数.则在$\sigma$代数$\underset{i=1}{\overset{\infty}{\times}}\mathbf{S}_i$上存在唯一的概率测度$q$，使对于每一个柱体$E=A_n\times X^{(n)}$，有

$$q(E)=\int\mu_1(dx_1)\int\mu_2(x_1,dx_2)\int\cdots$$

$$\int\chi_{A_n}(x_1,\cdots,x_n)\mu_n(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n), \qquad (7.29)$$

其中 $A_n\in\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}\mathbf{S}_i(n=1,2,\cdots)$.

§9　非可列无穷个测度空间的乘积

本节将测度空间乘积的理论推广到非可列无穷多个因子的情形。设T为任意非可列无穷集，对每一$t\in T$，$(X_t,\mathbf{S}_t,\mu_t)$为概率空间，由定理7.9，对于$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$中每一集$E$，存在$T$的可列子集$T_\omega$，使

$$E=A_{T_\omega}\times(\underset{t\in T\setminus T_\omega}{\times}X_t),$$

其中$A_{T_\omega}\in\underset{t\in T_\omega}{\times}\mathbf{S}_t$，令

$$\mu(E)=(\underset{t\in T_\omega}{\times}\mu_t)(A_{T_\omega}). \qquad (7.30)$$

因对一$t\in T$，μ_t是概率测度，易知μ的定义是不含混的，即若$E=A_{T_\omega}\times(\underset{t\in T\setminus T_\omega}{\times}X_t)$及$E=A^{(1)}_{T_\omega}\times(\underset{t\in T\setminus T^{(1)}_\omega}{\times}X_t)$，则有

$$\mu(A_{T_\omega}\times(\underset{t\in T\setminus T_\omega}{\times}X_t))=\mu(A_\omega^{(1)}\times(\underset{t\in T\setminus T_\omega^{(1)}}{\times}X_t)),$$

其中$T_\omega, T_\omega^{(1)}$为T的可列子集，且$T_\omega\subset T_\omega^{(1)}$，又$A_{T_\omega}\in\underset{t\in T_\omega}{\times}\mathbf{S}_t$，$A_{T_\omega^{(1)}}\in\underset{t\in T_\omega^{(1)}}{\times}\mathbf{S}_t$，这样我们便得到$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$上的一个集函数$\mu$。

定理7.24 由(7.30)式所确定的集函数μ为$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$上的概率测度。

证明 显然μ是非负的，且$\mu(\phi)=0$，$\mu(\underset{t\in T}{\times}X_t)=1$。往证$\mu$具有完全可加性。设$E_n\in\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$ $n=1,2,\cdots$且$\{E_n\}$两两不相交，不失一般性，我们可设

$$E_n=A_{T_\omega}^{(n)}\times(\underset{t\in T\setminus T_\omega}{\times}X_t)\qquad n=1,2,\cdots$$

其中T_ω是T的可列子集，$A_{T_\omega}^{(n)}\in\underset{t\in T_\omega}{\times}\mathbf{S}_t$，$n=1,2,\cdots$易知$A_{T_\omega}^{(n)}$两两不相交。由定理7.22′，我们有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=(\underset{t\in T_\omega}{\times}\mu_t)(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{T_\omega}^{(n)})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\underset{t\in T_\omega}{\times}\mu_t)(A_{T_\omega}^{(n)})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

所以μ是完全可加的。综合上面所证得的结论知，μ为$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$上

的概率测度。定理证完。

测度μ称为测度μ_t，$t\in T$的乘积，记为$\underset{t\in T}{\times}\mu_t$，而测度空间

$(\underset{t\in T}{\times}X_t, \underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t, \underset{t\in T}{\times}\mu_t)$称为测度空间$(X_t, \mathbf{S}_t, \mu_t)$，$t\in T$的乘积。

§10 独立随机变数

本节我们应用前面所学的测度论知识来讨论概率论中关于独立随机变数的某些问题。

设$(X, \mathbf{S}, \mu)$为概率空间，$A_i\in\mathbf{S}$，$i=1,2,\cdots,n$，如果对任意$m\leqslant n$，

$$\mu(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m)=\mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_m)$$

那么$A_1, A_2, \cdots, A_n$称为相互独立的。

设$A_t\in\mathbf{S}$，$t\in T$，如果其中任意有限个集都相互独立，则称$\{A_t, t\in T\}$相互独立。

设$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \cdots, \mathbf{C}_n$为$n$个可测集族，如果对任意$A_i\in\mathbf{C}_i$，$i=1,2,\cdots,n$，$A_1, A_2, \cdots, A_n$都相互独立，则称此$n$个集族相互独立。

显然若$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \cdots, \mathbf{C}_n$相互独立，$i_1, i_2, \cdots, i_m$是$1,2,\cdots,n$中任意$m$个数$(m\leqslant n)$，又$\mathbf{C}'_{i_k}\subset\mathbf{C}_{i_k}$，$k=1,2,\cdots,m$，则$\mathbf{C}'_{i_1}$，$\mathbf{C}'_{i_2}\cdots$，$\mathbf{C}'_{i_m}$也相互独立。

一族可测集族$\mathbf{C}_t$，$t\in T$称为相互独立的，如果其中任意有限多个族均相互独立。

引理7.6 设π族$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \cdots, \mathbf{C}_n$相互独立，则$\mathbf{S}(\mathbf{C}_1)$，

$\mathbf{S}(\mathbf{C}_2),\cdots,\mathbf{S}(\mathbf{C}_n)$亦相互独立。其中$\mathbf{S}(\mathbf{C}_i)$表$\mathbf{C}_i$产生的$\sigma$代数，$i=1,2,\cdots,n$。

证明 先证$\mathbf{S}(\mathbf{C}_1),\mathbf{C}_2,\cdots,\mathbf{C}_n$相互独立。用$\mathbf{A}$表示$\mathbf{S}(\mathbf{C}_1)$中满足所要证明的性质的集所组成的集族，显然$\mathbf{A}$是$\lambda$族且包含$\pi$族$\mathbf{C}_1$，故$\mathbf{A}=\mathbf{S}(\mathbf{C}_1)$，这便证明了$\mathbf{S}(\mathbf{C}_1),\mathbf{C}_2,\cdots,\mathbf{C}_n$相互独立。一般情形可用类似方法并用数学归纳法得出。引理证完。

推论 若可测集A和B相互独立，则A和B'；A'和B；A'和B'均相互独立。

证明 令$\mathbf{S}_1=\{A,A',X,\phi\}$和$\mathbf{S}_2=\{B,B',X,\phi\}$，显然$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}(\{A\})$，$\mathbf{S}_2=\mathbf{S}(\{B\})$，由引理7.6即得所证的结论。证完。

引理7.7 设π族$\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\cdots,\mathbf{C}_n,\mathbf{C}_{n+1},\cdots\mathbf{C}_{n+m}$相互独立，则$\sigma$代数$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}\{\mathbf{C}_1\cup\cdots\cup\mathbf{C}_n\}$和$\sigma$代数$\mathbf{S}_2=\mathbf{S}\{\mathbf{C}_{n+1}\cup\cdots\cup\mathbf{C}_{n+m}\}$也相互独立。

证明 令

$$\mathbf{A}=\{C_1\cap\cdots\cap C_n:\ C_i\in\mathbf{C}_i\text{或}C_i=X,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

$$\mathbf{B}=\{C_{n+1}\cap\cdots\cap C_{n+m}:\ C_i\in\mathbf{C}_i\text{ 或 }C_i=X,\ i=n+1,\cdots,n+m\},$$

由定理的假定知$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相互独立，显然$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$为π族，且$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}(\mathbf{A})$，$\mathbf{S}_2=\mathbf{S}(\mathbf{B})$，由引理7.6知$\mathbf{S}_1$与$\mathbf{S}_2$相互独立。引理证完。

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为n个随机变数，用F_i表ξ_i的分布函数，$\mu\xi_i^{-1}$表ξ_i的概率分布，μ_{F_i}表F_i产生的$L.S.$测度，$\mathbf{S}(\xi_i)$表集族$\{\xi_i^{-1}(B):\ B\in\mathbf{B}\}$，$i=1,2,\cdots,n$。令$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，由定理6.11$\xi$为$(X,\mathbf{S})$至$(R^n,\mathbf{B}^n)$内的可测变换。用$F$表$\xi_1$，

$\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合分布函数，μ_F表F产生的n维$L.S.$测度，$\mu\xi^{-1}$表$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的概率分布。

n个随机变数$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$称为相互独立的，如果对于任意n个实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均有

$$F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=F_1(\lambda_1)F_2(\lambda_2)\cdots F_n(\lambda_n). \quad (7.31)$$

定理7.25 下述四命题等价

i) $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$相互独立。

ii) 集族$\mathbf{S}(\xi_1)$，$\mathbf{S}(\xi_2)$，$\cdots$，$\mathbf{S}(\xi_n)$相互独立，即对任意$B_i\in\mathbf{B}$，$i=1,2,\cdots,n$均有

$$\mu(\xi_1^{-1}(B_1)\cap\xi_2^{-1}(B_2)\cap\cdots\cap\xi_n^{-1}(B_n))=$$

$$\mu(\xi_1^{-1}(B_1))\mu(\xi_2^{-1}(B_2))\cdots\mu(\xi_n^{-1}(B_n)). \quad (7.32)$$

iii) $\mu\xi^{-1}=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mu\xi_i^{-1}$. $\quad (7.33)$

iv) $\mu_F=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mu_{F_i}$.

证明 i) $\Rightarrow$ ii)令

$$\mathbf{C}_i=\{(-\infty,\lambda_i):\lambda_i\text{ 为实数}\},$$

则$\mathbf{C}_i$为π族，且$\mathbf{S}(\mathbf{C}_i)=\mathbf{B}$，从而

$$\mathbf{S}(\xi_i)=\xi_i^{-1}(\mathbf{B})=\mathbf{S}(\xi_i^{-1}(\mathbf{C}_i)),i=1,2,\cdots,n \quad (7.35)$$

易知$\xi_i^{-1}(\mathbf{C}_i)$是π族且由(7.31)式知，$\xi_1^{-1}(\mathbf{C}_1)$，$\xi_2^{-1}(\mathbf{C}_2)$，$\cdots$ $\xi_n^{-1}(\mathbf{C}_n)$相互独立，由引理7.6和(7.35)我们有$\mathbf{S}(\xi_1)$，$\mathbf{S}(\xi_2)$，

$\cdots,\mathbf{S}(\xi_n)$相互独立。

ii) $\Rightarrow$ iii)由(7.32)式知，对任意$B_i\in\mathbf{B}$，$i=1,2,\cdots,n$均有

$$\mu\xi^{-1}(\mathop{\times}_{i=1}^{n}B_n)=(\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mu\xi_i^{-1})(\mathop{\times}_{i=1}^{n}B_i). \tag{7.36}$$

(7.36)式表示$\mu\xi^{-1}$和$\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mu\xi_i^{-1}$在$n$维实数空间的可测矩形上相等，因全体可测矩形组成$R^n$中半环且包含$R^n$，又$\mu\xi^{-}$和$\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mu\xi_i^{-1}$是有限测度，由引理2.5即得(7.33)式。

iii) $\Rightarrow$iv)　由引理6.2及6.2′即得。

iv) $\Rightarrow$ i)　对任意实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，由(7.34)得

$$\mu_F(\mathop{\times}_{i=1}^{n}(-\infty,\lambda_i))=(\mathop{\times}_{i=1}^{n}\mu_{F_i})(\mathop{\times}_{i=1}^{n}(-\infty,\lambda_i)),$$

上式即(7.31)。定理证完。

定理7.26　设$n+m$个随机变数$\xi_1,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+m}$相互独立，$f_1$和$f_2$分别是$(R^n,\mathbf{B}^n)$和$(R^m,\mathbf{B}^m)$上的贝尔函数，则$f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与$f_2(\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+m})$相互独立。

证明　令

$$\mathbf{S}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\mathbf{S}(\{\xi_i^{-1}(B):$$
$$i=1,2,\cdots,n,\ B\in\mathbf{B}\})$$
$$\mathbf{S}(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots,\xi_{n+m})=\mathbf{S}(\{\xi_i^{-1}(B):$$
$$i=n+1,\cdots,n+m,\ B\in\mathbf{B}\})$$

由引理7.7知，$S(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与$S(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots,\xi_{n+m})$相互独立。设$B_1$和$B_2$是任意两个波雷尔集，则

$$\begin{aligned}&\mu(\{x: f_1(\xi_1(x),\cdots,\xi_n(x))\in B_1\}\cap\\&\qquad\{x: f_2(\xi_{n+1}(x),\cdots,\xi_{n+m}(x))\in B_2\})\\&=\mu(\{x: f_1(\xi_1(x),\cdots,\xi_n(x))\in B_1\})\\&\qquad\mu(\{x: f_2(\xi_{n+1}(x),\cdots,\xi_{n+m}(x))\in B_2\})\end{aligned}$$

故$f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与$f_2(\xi_{n+1},\cdots,\xi_{n+m})$相互独立。

定理7.26可以推广为下述定理。

定理7.26′ 设ξ_{ij}，$i=1,2,\cdots,k$，$j=1,2,\cdots,n_i$是相互独立随机变数，f_i为n_i维贝尔函数，$i=1,2,\cdots,k$ 则 $f_1(\xi_{11},\cdots,\xi_{1n_1})$，$f_2(\xi_{21},\cdots,\xi_{2n_2})$，$\cdots$，$f_k(\xi_{k1},\cdots,\xi_{kn_k})$为相互独立随机变数。

证明 完全类似于定理7.26，请读者自行完成。

定理7.27 设随机变数$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立且ξ_i的数学期望$E(\xi_i)$存在，$i=1,2,\cdots,n$，则$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)$亦存在且

$$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=E(\xi_1)E(\xi_2)\cdots E(\xi_n). \tag{7.37}$$

证明 设ξ_i的分布函数为F_i，$i=1,2,\cdots,n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$的联合分布函数为F。先设$\xi_i,i=1,2,\cdots,n$是非负随机变数，由定理6.12我们有

$$\int\xi_1\xi_2\cdots\xi_n d\mu=\int_{R^n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n d\mu_F, \tag{7.38}$$

由假设$\mu_F=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\mu_{F_i}$，利用富比尼定理及定理6.10

$$\int_{R^n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n d\mu_F=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_1 d\mu_{F1}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_2 d\mu_{F2}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_n d\mu_{Fn}$$

$$=\int\xi_1 d\mu\int\xi_2 d\mu\cdots\int\xi_n d\mu . \tag{7.39}$$

综合(7.38)和(7.39)得

$$\int\xi_1\xi_2\cdots\xi_n d\mu=\int\xi_1 d\mu\cdots\int\xi_n d\mu . \tag{7.40}$$

对一般ξ_i，因$E(\xi_i)$存在，故$E(|\xi_i|)$亦存在，对$|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_n|$使用等式(7.40)即知$E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$存在，重复$\xi_i$为非负随机变数对(7.40)的证明，即得

$$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=E(\xi_1)E(\xi_2)\cdots E(\xi_n).$$

定理证完。

定理7.28 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，且它们的二阶矩都存在，则$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$的二阶矩存在，且$\xi_1+\cdots+\xi_n$的方差等于各加项方差之和。

证明 仅就$n=2$的情形来证明，一般情形可类似地证明。由

$$E((\xi_1+\xi_2)^2)=E(\xi_1^2)+2E(\xi_1\xi_2)+E(\xi_2^2)$$

知，$\xi_1+\xi_2$的二阶矩存在。由定理7.27我们有

$$E((\xi_1-E(\xi_1))(\xi_2-E(\xi_2)))=$$
$$E(\xi_1-E(\xi_1))E(\xi_2-E(\xi_2))=0,$$

故

$$D^2(\xi_1+\xi_2)=\int(\xi_1+\xi_2-E(\xi_1)-E(\xi_2))^2 d\mu$$
$$=\int(\xi_1-E(\xi_1))^2 d\mu$$
$$+2\int(\xi_1-E(\xi_1))(\xi_2-E(\xi_2))d\mu$$

$$+\int(\xi_2-E(\xi_2))^2 d\mu = D^2(\xi_1)+D^2(\xi_2)\ .$$

定理证完。

随机变数相互独立的概念可以推广到一族随机变数。设$\{\xi_t, t\in T\}$为一族随机变数，如果其中任意有限个随机变数均是相互独立的，则称$\{\xi_t, t\in T\}$相互独立。

在研究相互独立随机变数序列时，著名的Колмогоров零一律和Borel-Cantelli引理起着重要作用，下面我们来介绍这两个定理。

定理7.29 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots$为相互独立随机变数序列，$X$的子集$A$若满足

$$A\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{S}(\xi_m, m\geqslant n)$$

则A之概率只能为零或一。

证明 令

$$\mathbf{A}=\{A: A\in\mathbf{S},\ \mu(AA)=\mu(A)\mu(A)\}$$

如果我们能够证明$A\in\mathbf{A}$，即得定理的证明，因为这时

$$\mu(A)=\mu(AA)=[\mu(A)]^2$$

故$\mu(A)$非等于零或一不可。

由独立性及对A的假设知$\mathbf{S}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\subset\mathbf{A}$，$n=1,2,\cdots$ 因所有$\mathbf{S}(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$n=1,2,\cdots$的集组成一个含于$\mathbf{A}$的代数，它产生的$\sigma$代数为$\mathbf{S}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$。另一方面由$\mathbf{A}$的定义易知$\mathbf{A}$为单调族，故$\mathbf{A}\supset\mathbf{S}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$。但$A\in\mathbf{S}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$，故$A\in\mathbf{A}$。定理证完。

推论 若η是一个随机变数且关于$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{S}(\xi_m, m\geqslant n)$可测，

则存在常数 c，使$\mu(\{x:\eta(x)=c\})=1$。

证明 由定理知对任意λ，$\{x:\eta(x)<\lambda\}$的概率只能取零或一，亦即η的分布函数F只能取零或一，故存在常数c，使$\mu\{x:\eta(x)=c\}=1$。推论证完。

定理7.29称为哥莫哥洛夫零一律。作为它的应用我们考虑下述问题。设$M_n\in\mathbf{S}$，$n=1,2,\cdots$我们要计算$\overline{\lim\limits_n}M_n$的概率，令

$$\xi_n=\chi_{M_n}\qquad n=1,2,\cdots$$

若M_n，$n=1,2,\cdots$相互独立，则上述$\{\xi_n\}$满足定理7.29的所有条件，故$\mu(\overline{\lim\limits_n}M_n)$只能取零或一。下面的Borel-Cantelli引理给出判别每一种情形的准则。

定理7.30 设$M_n\in\mathbf{S}$，$n=1,2,\cdots$，令$A=\overline{\lim\limits_n}M_n$我们有下面结果：

i) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(M_n)<+\infty$，则$\mu(A)=0$。

ii) 若$M_1,M_2,\cdots,M_n,\cdots$相互独立，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(M_n)=+\infty$，则$\mu(A)=1$。

证明 i)对任意正整数n，有

$$\mu(A)\leqslant\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty}M_k)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\mu(M_k),$$

令$n\to\infty$，上式右端趋于0，故$\mu(A)=0$。

ii)显然$A'=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}M_k'$，因$M_1,M_2,\cdots,M_n\cdots$相互独

立，由引理7.6知M_n'，$n=1,2,\cdots$也相互独立，故

$$1-\mu(A)=\mu(A')=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcap_{k=n}^{\infty}M_k')$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mu(\bigcap_{k=n}^{n+m}M_k')$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{n+m}\mu(M_k')$$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{n+m}(1-\mu(M_k)).$$

因对任意实数$a(0\leqslant a\leqslant 1)$我们有$e^{-a}\geqslant 1-a$，故

$$\prod_{k=n}^{n+m}(1-\mu(M_k))\leqslant e^{-\sum\limits_{k=n}^{n+m}\mu(M_k)},$$

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(M_n)=+\infty$，上式中令$m\to\infty$得

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{n+m}(1-\mu(M_k))=0,$$

从而$1-\mu(A)=0$，即$\mu(A)=1$，定理证完。

由定理 7.30 我 们得到：若M_n,$n=1,2,\cdots$相互 独 立，则由$\mu(A)=0$或 1 可推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(M_n)$收敛或发散。

§11 哥莫哥洛夫定理

本节我们来考虑下述问题：设 $(\underset{t\in T}{\times} X_t, \underset{t\in T}{\times} \mathbf{S}_t)$ 是一族可测空间$(X_t, \mathbf{S}_t)$，$t\in T$的乘积，其中T是任意无穷集。对T的每一有限子集T_1，设μ_{T_1}是$\underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t$上的一个测度，且这族测度$\{\mu_{T_1}: T_1\subset T$，且$T_1$有限$\}$是相容的，即对$T$的任意两个有限子集$T_1$，$T_2$且$T_1\subset T_2$，均有

$$\mu_{T_2}[A_{T_1}\times(\underset{t\in T_2\setminus T_1}{\times} X_t)] = \mu_{T_1}(A_{T_1}) \tag{7.41}$$

其中$A_{T_1}\in\underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t$。设$\mathbf{E}$为$\underset{t\in T}{\times} \mathbf{S}_t$中全体柱体所组成的代数，对每一$\mathbf{E} = A_{T_1}\times(\underset{t\in T\setminus T_1}{\times} X_t) \in \mathbf{E}$，其中$A_{T_1}\in\underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t$，令

$$\mu(E) = \mu_{T_1}(A_{T_1}),$$

由$\{\mu_{T_1}\}$的相容性知$\mathbf{E}$上由(7.41)式所确定的集函数μ是不含混的。即同一柱体表示为不同形状时，不会对应不同的μ值，这样定义的集函数μ能否成为$\mathbf{E}$上的测度？在一般情况下，μ未必是测度，但当$X_t = R$，$\mathbf{S}_t = \mathbf{B}$，$t\in T$，且$\{\mu_{T_1}\}$是有限测度族时，回答是肯定的，即所谓哥莫哥洛夫定理。

引理7.8 设$(X_t, \mathbf{S}_t)$，$t\in T$，为一族可测空间，其中$X_t = R$，$\mathbf{S}_t = \mathbf{B}$，$t\in T$。对$T$的每一有限子集$T_1$，$\mu_{T_1}$为$\underset{t\in T_1}{\times} \mathbf{S}_t$上的有限测度(或概率测度)，且此族测度$\{\mu_{T_1}: T_1\subset T$，且$T_1$有限$\}$

是相容的，对每一$E = A_{T_1} \times (\underset{t \in T \setminus T_1}{\times} X_t) \in \mathbf{E}$ 其中 $A_{T_1} \in \underset{t \in T_1}{\times} \mathbf{S}_t$，令

$$\mu(E) = \mu_{T_1}(A_{T_1})$$

则μ是$\mathbf{E}$上的有限测度(或概率测度)。

证明 不失一般性，可设T为全体自然数组成的集。显然μ是非负有限的，且$\mu(\phi)=0$，运用引理7.5中相似的方法可证μ具有有限可加性。要证μ是完全可加的，只须证：若$E_n \in \mathbf{E}$ $E_n \downarrow$ 且$\mu(E_n) \geqslant \varepsilon$，其中$\varepsilon$是任意正数，则$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \phi$。

不妨设
$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \times X^{(1)}, \\ E_2 &= A_2 \times X^{(2)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= A_n \times X^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

其中 $A_n \in \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathbf{S}_i$，$X^{(n)} = \underset{i=n+1}{\overset{\infty}{\times}} X_i$，$n = 1, 2, \cdots$。

首先作出$\mathbf{E}$中一串$F_n(n=1,2,\cdots,)$使

$$F_n = G_n \times X^{(n)}$$

其中G_n为$\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} X_i$中含于$A_n$的有界闭集，且$F_n$保持$E_n(n=1, 2, \cdots)$原来的性质，即$F_n \downarrow$ 且$\mu(F_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$。下面我们来作满足上述要求的$F_n$。

对每一A_n，取有界闭集$H_n \subset A_n$，使$\mu_n(A_n \setminus H_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$，

其中$\mu_n=\mu_{T_1}$，$T_1=\{1,2,\cdots,n\}$。令

$$G_n=(H_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\cap(H_2\times X_3\times\cdots\times X_n)\cap\cdots\cap(H_{n-1}\times X_n)\cap H_n$$

则$G_n(n=1,2,\cdots,)$是$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}X_i$中的有界闭集且$G_n\subset A_n$。又

$$\begin{aligned}\mu_n(A_n\backslash G_n)&=\mu_n\{[A_n\backslash(H_1\times X_2\times\cdots\times X_n)]\cup\cdots\cup[A_n\backslash H_n]\}\\&\leq\mu_n[A_n\backslash(H_1\times X_2\times\cdots\times X_n)]+\cdots+\mu_n[A_n\backslash H_n]\\&\leq\mu_n[(A_1\backslash H_1)\times X_2\times\cdots\times X_n]+\cdots+\mu_n[A_n\backslash H_n]\\&=\mu_1(A_1\backslash H_1)+\mu_2(A_2\backslash H_2)+\cdots+\mu_n(A_n\backslash H_n)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

令$F_n=G_n\times X^{(n)}$，显然$F_n\downarrow$且

$$\mu(F_n)=\mu_n(G_n)=\mu_n(A_n)-\mu_n(A_n\backslash G_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\text{ 。}$$

其次我们来证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$。因为$F_n(n=1,2,\cdots)$的测度于大0，故$F_n$为非空集。在每个$F_n$中取一点$x^{(n)}=(x_1^{(n)}\cdots,x_n^{(n)}\cdots)$，由$F_n$的单调性，有$x^{(n+p)}\in F_n(p=1,2,\cdots)$从而$(x_1^{(n+p)},\cdots x_n^{(n+p)})\in G_n(p=1,2\cdots)$。

因为$x_1^{(n)}\in G_1(n=1,2,\cdots)$，且$G_1$是有界闭集，所以有收敛子序列$\{x_1^{(n_1k)}\}$且$x_1^{(n_1k)}\to x_1\in G_1$，又因为$(x_1^{(n)},x_2^{(n)})\in G_2(n=2,3,\cdots)$从而$(x_1^{(n_1k)},x_2^{(n_1k)})\in G_2(n_1k\geqslant2)$，

由于G_2是有界闭集，故有收敛子序列$\{(x_1^{(n_2k)},x_2^{(n_2k)})\}$，且$(x_1^{(n_2k)}, x_2^{(n_2k)})\to(x_1, x_2)\in G_2$。用数学归纳法得出：$(x_1^{(n_nk)}, x_2^{(n_nk)}, \cdots, x_n^{(n_nk)})\to(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in G_n, n=1, 2, \cdots$。用对角线方法可得出

$$(x_1^{(n_kk)}, x_2^{(n_kk)}, \cdots, x_n^{(n_kk)}\cdots)\to(x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots)$$

且$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in G_n, n=1,2,\cdots$。

令$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，则有$x\in F_n(n=1,2,\cdots)$，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\phi$。

最后，由$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，可知$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\neq\phi$。证完。

因为$\mathbf{S}(\mathbf{E})=\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$，由测度扩张定理及引理7.8可得下面定理：

定理7.31 设$(X_t, \mathbf{S}_t)$，$t\in T$，为一族可测空间，其中$X_t=R$，$\mathbf{S}_t=\mathbf{B}$，$t\in T$。对T的每一有限子集T_1，μ_{T_1}为$\underset{t\in T_1}{\times}\mathbf{S}_t$上的有限测度(或概率测度)，且此族测度$\{\mu_{T_1}\}$是相容的，则$\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$上存在唯一的有限测度(或概率测度)$\mu$，使对每一柱体$E=A_{T_1}\times(\underset{t\in T\setminus T_1}{\times}X_t)$，其中$A_{T_1}\in\underset{t\in T_1}{\times}\mathbf{S}_t$，有

$$\mu(E)=\mu_{T_1}(A_{T_1}).$$

下面我们来介绍定理7.31在概率论中的应用。设$(X,\mathbf{S},\mu)$为概率空间，T为实数空间R中任意集，对于每一$t\in T$，有一随机变数ξ_t与之对应，称随机变数族$\xi_t, t\in T$为一随机过程，记为$\xi=(\xi_t, t\in T)$。由定理7.11ξ又可看作$(X,\mathbf{S},\mu)$至$(R^T,\mathbf{B}^T)$上的可测变换，但R^T的元素是定义在T上的实函数，所以对每一$x\in X$，就有一个这样的函数与之对应，在这种意义下随机过程有时也叫做随机函数。

对于T的任意n个元素$t_1,t_2,\cdots,t_n$，我们用$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$表示随机变数$\xi_{t_1},\xi_{t_2},\cdots,\xi_{t_n}$的联合分布函数，即

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$=\mu(\xi_{t_1}<\lambda_1,\xi_{t_2}<\lambda_2,\cdots,\xi_{t_n}<\lambda_n).$$

当n在正整数集及t_i在T中变动时$(1\leqslant i\leqslant n)$得到一族分布函数$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n):\ n>0,\ t_i\in T\}$，称过程$\xi$的有限维分布函数族。显然它满足下述条件：

i）对称条件：对于$1,2,\cdots,n$的任意排列$i_1,i_2,\cdots,i_n$有等式

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots t_{i_n}}(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n})$$

$$=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

ii）一致条件：若$m<n$，则对任意$t_{m+1},\cdots,t_n$有

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m,+\infty,\cdots,+\infty)=$$

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m).$$

下面我们讨论相反的问题，即所谓随机过程存在性定

理。先证明一个引理。

引理7.9 设已给参数集T，对任意n及T的任 n 个 元 素 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，有一n维分布函数$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$与之对应，且此族分布函数满足对称条件和一致条件，则此族分布函数确定R^T上一概率测度μ，满足对每一$E=A_{T_n}\times(\bigtimes_{t\in T\setminus T_n}R_t)$有

$$\mu(E)=\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}(A_{T_n}),$$

其中$T_n=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$，$A_{T_n}\in R^{T_n}$，$\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}$为 n 维分布函数 $F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$产生的$L.S.$测度，$R_t=R$，$t\in T\setminus T_n$ 。

证明 对于T的任n个元素 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 由$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$的对称条件易知它确定$\mathbf{B}^{T_n}$上一概率测度$\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}$。现在证明此族概率测度是相容的，即对任意$n>m$，$t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n\in T$均有

$$\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}(A_{T_m}\times R_{t_{m+1}}\times\cdots\times R_{t_n})$$
$$=\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}}(A_{T_m}) \qquad (7.42)$$

其中$T_m=\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，$A_{T_m}\in\mathbf{B}^{T_m}$，$R_t=R$，$t=t_{m+1},t_{m+2},\cdots,t_n$。事实上$\mathbf{B}^{T_m}$中满足(7.42)式的所有集组成一个$\lambda$ 族，又因为 R^{T_m}中全体形如$\bigtimes_{i=1}^{m}(-\infty,\lambda_{t_i})$的集组成$\pi$族$\mathbf{C}$，由一致性条件知$\mathbf{C}$每一元素均满足(7.42)，显然$\mathbf{S}(\mathbf{C})=\mathbf{B}^{T_m}$，故$\mathbf{B}^{T_m}$中所有元素均满足(7.42)，最后利用定理7.31即得引理

的全部结论。引理证完。

定理7.32 设已给参数集T及满足对称条件和一致条件的有限维分布函数族$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}; t_i\in T, i=1,2,\cdots,n, n>0\}$则必存在概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$及定义在其上的随机过程$\xi=(\xi_t,t\in T)$，使$\xi$的有限维分布函数族等于所给定的分布函数族。

证明 令$X=R^T$，$\mathbf{S}=\mathbf{B}^T$，μ为分布函数族$\{F_{t_1,\cdots,t_n}; t_i\in T, i=1,2,\cdots,n, n>0\}$在$\mathbf{B}^T$产生的概率测度，由引理7.9

$$\mu(A_{T_n}\times(\underset{t\in T\setminus T_n}{\times}R_t))=\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}(A_{T_n})\qquad(7.43)$$

其中$T_n=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$，$A_{T_n}\in\mathbf{B}^{T_n}$，$R_t=R$，$t\in T\setminus T_n$。于是我们得到概率空间$(X,\mathbf{S},\mu)$。对于每一$t\in T$，在$(X,\mathbf{S},\mu)$上定义一实函数：

$$\xi_t(x)=\lambda(t)\qquad \text{当}x=\lambda(\cdot)$$

其中$\lambda(\cdot)$表示定义在T上的实值函数。因此ξ_t是R^T上的t坐标投影变换，亦即ξ_t在$x=\lambda(\cdot)$上的值等于$\lambda(\cdot)$在t点的值$\lambda(t)$。由定理7.7知ξ_t是随机变数，从而$\xi=(\xi_t,t\in T)$是随机过程。由(7.43)式我们有

$$\begin{aligned}&\mu(\{\xi_{t_i}<\lambda_i, i=1,2,\cdots,n\})\\&=\mu_{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}}(\{\xi_{t_i}<\lambda_i, i=1,2,\cdots,n\})\\&=F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\end{aligned}$$

从而ξ的有限维分布函数族与分布函数族$\{F_{t_1,t_2,\cdots t_n}\}$相同。定理证完。

习 题

1. 举例说明定理7.3中的$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$即使加强为σ代数，$\mathbf{P}$亦可能不是环。(例如，取$X_1=X_2=X$，$\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2=\{X,\phi,A,A'\}$，其中$A\subset X$)。

2. 设$\mathbf{A}_1$是X_1中子集所组成的集族，$A_2\subset X_2$，证明：$\mathbf{S}(\mathbf{A}_1)\times A_2=\mathbf{S}(\mathbf{A}_1\times A_2)$。

3. 设$A_i\subset X_i$，$\mathbf{S}_i$为X_i子集组成的σ代数，$i=1,2$。则$(A_1\times A_2)\cap(\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)=(A_1\cap\mathbf{S}_1)\times(A_2\cap\mathbf{S}_2)$。

4. 举例说明定理7.4的逆定理不成立。(例如取$X_1=X_2=$任意不可数集，$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2=X_1$中包含全体单点集的最小$\sigma$代数，$D=\{(x_1,x_2):x_1=x_2\}$)。

5. 设$(X_1\times X_2,\ \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$是$(X_i,\mathbf{S}_i)$，$i=1,2$的乘积，证明$X_1\times X_2$中的非空矩形$A_1\times A_2$是可测集的充要条件是$A_1\times A_2$为可测矩形。

6. 设$(X_1\times X_2,\ \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$是$(X_i,\mathbf{S}_i)$ $i=1,2$的乘积，$f(x_1)$是$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的可测函数，对每一$(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$，令$h(x_1,x_2)=f(x_1)$，证明$h$是$(X_1\times X_2,\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$上可测函数。

7. 设$R^{(\omega)}$及$\mathbf{B}^{(\omega)}$分别为可列维实数空间及波雷尔集族。证明$\mathbf{B}^{(\omega)}$等于$R^{(\omega)}$中全体开集族所产生的σ代数。

8. 证明$\mathbf{B}^{(p)}$等于$R^{(p)}$中全体具有下述形状的矩形$\underset{t\in T}{\times}A_t$所产生的$\sigma$代数，其中除有限个$t$值使$A_t$为$R$中有理半开闭区间外，其余的均有$A_t=R$。($p$为$T$的势)。

9. 设$f_t,t\in T$是集X上的一族实函数，其中T是非可列无穷集。令S_{T_1}表示X上使每个f_t，$t\in T_1$，均可测的最小σ代数，其

一中$T_1\subset T$，则

(i) 对任意$E\in\mathbf{S}_T$，必存在T的可列子集T_1（依赖E于），使$E\in\mathbf{S}_{T_1}$。

ii) 设f是$(X,\mathbf{S}_T)$上的可测函数则必存在T的可列子集T_1(依赖于f)，使f对$\mathbf{S}_{T_1}$可测。

10. 设$(\underset{t\in T}{\times}X_t,\ \underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t)$是可测空间$(X_t,\mathbf{S}_t)$，$t\in T$的乘积，证明：

(i) 对每一$E\in\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t$，存在$\mathbf{S}_t$中集序列$\{A_t^{(n)}\}$，$n=1,2,\cdots$，使$E\in\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t'$，其中$\mathbf{S}_t'=\mathbf{S}(A_t^{(n)},n=1,2,\cdots)$，$t\in T$。

(ii) 对任意$(\underset{t\in T}{\times}X_t,\ \underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t)$上的可测函数$f$，存在集序列$\{A_t^{(n)},n=1,2,\cdots\}$使$f$ $\underset{t\in T}{\times}\mathbf{S}_t'$可测。其中$\mathbf{S}_t'=\mathbf{S}(A_t^{(n)},n=1,2,\cdots)$，$t\in T$。

11. 设$(X_1\times X_2,\ \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2,\ \mu_1\times\mu_2)$是$\sigma$有限测度空间$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)$，$i=1,2$的乘积空间。$\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$的完备化（对$\mu_1\times\mu_2$）$\sigma$代数。设$E\in\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$，证明：对几乎所有$x_1$，$E_{x_1}\in\overline{\mathbf{S}_2}$。

12. $(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)$，$i=1,2$是两个σ有限测度空间，$\overline{\mathbf{S}_i}$表示$\mathbf{S}_i$的完备化$(i=1,2)$。$\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$的完备化$\sigma$代数。证明：

(i) $\overline{\overline{\mathbf{S}_1}\times\overline{\mathbf{S}_2}}=\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$，

(ii) $\overline{\mu_1\times\mu_2}(E)=\int\overline{\mu_2}(E_{x_1})d\overline{\mu_1}$，其中$E\in\overline{\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2}$。

13. 设$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)$, $i=1,2$, 是两个σ有限测度空间, $f_i(i=1,2)$是$(X_i,\mathbf{S}_i,\mu_i)$上的可积函数, 令$h(x_1,x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)$, 则函数$h$是乘积空间$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2, \mu_1\times\mu_2)$上的可积函数, 且

$$\int h d(\mu_1\times\mu_2)=\int f_1 d\mu_1\cdot\int f_2 d\mu_2 .$$

14. 设$(X_1\times X_2, \mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2)$是$(X_i,\mathbf{S}_i)$, $i=1,2$的乘积, λ是$\mathbf{S}_1\times\mathbf{S}_2$上的一个测度, 对每个$A_2\in\mathbf{S}_2$, 令$\lambda_2(A_2)=\lambda(X_1\times A_2)$, 证明:

(i) λ_2是$\mathbf{S}_2$上的测度,

(ii) 设$f(x_2)$是$(X_2,\mathbf{S}_2)$上任意可测函数, 则

$$\int f(x_2)d\lambda_2=\int f(x_2)d\lambda,$$

上述等式意义是, 若等号一边有意义, 则另一边亦有意义。

15. 设$(X_i, \mathbf{S}_i)$ $i=1,2$ 为两个可测空间, μ_1是$\mathbf{S}_1$上的概率测度, $\mu_2(x_1,A_2)$是$X_1\times\mathbf{S}_2$上的函数, 当$x_1\in X_1$固定时, 它是$\mathbf{S}_2$上的概率测度, 当$A_2\in\mathbf{S}_2$固定时, 它是$(X_1,\mathbf{S}_1)$上的可测函数, 证明,

(i) 对每一$A_1\in\mathbf{S}_1$, $\mu_1(A_1)=q(A_1\times X_2)$, 其中$q$由(7.21)式确定。

(ii) 对每一$A_2\in\mathbf{S}_2$, 令$q'(A_2)=\int\mu_2(x_1,A_2)\mu_1(dx_1)$, 则$q'$是$\mathbf{S}_2$上的概率测度。

(iii) 设$f(x_2)$是$(X_2,\mathbf{S}_2,q')$上的任一可积函数, 则

$$\int f(x_2)dq'=\int\mu_1(dx_1)\int f(x_2)\mu_2(x_1,dx_2).$$

16. 设$(X_i,\mathbf{S}_i)$, $i=1,2,3$ 是三个可测空间。$\mu(x_2,A_3)$是

$(X_2 \times \mathbf{S}_3)$上的二元函数，当$x_2$固定时，它是$\mathbf{S}_3$上的概率测度，当$A_3$固定时它是$(X_2, \mathbf{S}_2)$上的可测函数，又设i)$h(x_1, x_2)$是$(X_1 \times X_3, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3)$上的非负可测函数或ii)$h(x_1 x_3)$是$(X_1 \times X_3, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3)$上的可测函数，且

$$g(x_1, x_2) = \int h(x_1, x_3)\mu_3(x_2, dx_3) < +\infty,$$

对任意$x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$。证明：g是$(X_1 \times X_2, \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2)$上的可测函数。

17. 设$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i)$是概率空间$(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$的乘积，且$E_i \in \mathbf{S}_i$，$i = 1, 2, \cdots$。证明：

$$E = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i,$$

且

$$(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i)(E) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_i) (= \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i)).$$

18. 用哥莫哥洛夫定理证明定理7.23。

第八章 广义测度

§1广义测度的汉恩分解和约当分解

设f在测度空间$(X,\mathbf{S},\mu)$上积分存在。在第四章中我们把如下的集函数

$$\nu(E)=\int_E f d\mu,\quad E\in\mathbf{S},$$

称为f的不定积分。由定理4.13及定理4.1知ν具有完全可加性且当$E\in\mathbf{S}$，$\mu(E)=0$时，则$\nu(E)=0$。本章我们将证明对于测度空间$(E,\mathbf{S},\mu)$上的任意完全可加实值集函数ν，在满足一定条件时，必是某可积函数的不定积分，这就是所谓拉东—尼古丁定理(J. Radon—O.Nikodym)。这个定理的用途是多样的，例如在概率论中关于条件数学期望的存在性，数理方程中函数空间$Lp(X,\mathbf{S},\mu)$上的线性泛函表现等都要用到这个定理。

设$(X,\mathbf{S})$是可测空间，ν是$\mathbf{S}$上的实函数（即对每一$E\in\mathbf{S}$，$|\nu(E)|<+\infty$），且具有完全可加性，即若$E_1,E_2,\cdots$是两两不相交的可测集序列，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$收敛且

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$$

那么我们称ν是$(X,\mathbf{S})$上的完全可加实值集函数或有限广义

测度*) 容易证明有限广义测度有下述性质：

i) $\nu(\phi)=0$。

ii) ν具有限可加性，即若E_1，$E_2,\cdots,E_n$是两两不相交的可测集，则

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}\nu(E_i).$$

iii) 若E与F均是可测集，且$F\subset E$则

$$\nu(E\setminus F)=\nu(E)-\nu(F).$$

例1 设f是测度空间$(X,\mathbf{S}\ \mu)$上的可积函数，对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\nu(E)=\int_E fd\mu$$

那么由定理4.13知，上述集函数ν是有限广义测度。

例2 设μ_1和μ_2是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的两个有限测度，对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\nu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E),$$

那么ν是一个有限广义测度。下面我们将证明，每一个有限广义测度必可表为两个有限测度之差。首先介绍一些概念。

设ν是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，又$E\in\mathbf{S}$，若对于每一$F\in\mathbf{S}$，$F\subset E$，均有$\nu(F)\geqslant0$，则称E(对于ν)是正集。类似地如果对每一$F\in\mathbf{S}$，$F\subset E$均有$\nu(F)\leqslant0$，则称E(对于ν)是负集。显然空集ϕ既是正集又是负集。对于例1所述的有限广义测度ν，令$A=\{x:f(x)>0\}$和$B=\{x:f(x)\leqslant0\}$，则$X=A\cup B$，且A为正集，B为负集。下面定理8.1说明$(X,\mathbf{S})$上

---

*) 为了概率论的需要，本书仅讨论有限广义测度。

任意有限广义测度ν亦有类似的性质。为证明定理8.1先证明两个引理。

引理8.1 两个负集之差，有限个或可列个负集之并都是负集。

证明 设E_1和E_2是负集，易见负集的可测子集仍为负集，故$E_2\setminus E_1$是负集。又

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2\setminus E_1),$$

故对任意$F\in \mathbf{S}$，$F\subset E_1\cup E_2$就有

$$\nu(F)=\nu(F\cap(E_1\cup E_2))=\nu(F\cap E_1)+\nu(F\cap(E_2\setminus E_1))\leqslant 0,$$

因此$E_1\cup E_2$是负集。利用数学归纳法可知，有限个负集之并仍为负集。

现设E_1，E_2，…是负集，令

$$E_n^* = E_n\setminus(E_1\cup\cdots\cup E_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots,$$

其中$E_0=\phi$，显然我们有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^*$，由上面已证得的结果知，每一个$E_n^*$都是负集。故对任意$F\in\mathbf{S}$，$F\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，我们有

$$\nu(F)=\nu(F\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)=\nu(F\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^*)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(F\cap E_n^*)\leqslant 0,$$

因此$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$是负集。引理证完。

若E是负集且$\nu(E)=0$，那么E的任意可测子集F均有$\nu(F)=0$。事实上，若$\nu(F)<0$，则由广义测度的性质iii)有

$$\nu(E)=\nu(F)+\nu(E\setminus F)<0,$$

与假设$\nu(E)=0$矛盾。

设E是负集且$\nu(E)<0$，则称E为真正的负集，类似地可以定义真正的正集。

引理8.2 设A是可测空间$(X,\mathbf{S})$中的可测集，若A不包含真正的负集，则A是正集。

证明 我们用反证法来证明这个引理。若A不是正集，那么有$E_0\in\mathbf{S}$使$E_0\subset A$且$\nu(E_0)<0$。由引理的假设知E_0不能是负集，故

$$\sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},\ E\subset E_0\}>0. \tag{8.1}$$

令$K_1=\min\{\sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},\ E\subset E_0\},\ 1\}$，由上确界的定义及(8.1)式知，存在$E_1\in\mathbf{S}$，$E_1\subset E_0$，且$\nu(E_1)>\frac{K_1}{2}>0$。因而

$$\nu(E_0\setminus E_1)=\nu(E_0)-\nu(E_1)<\nu(E_0)<0,$$

由假设知$E_0\setminus E_1$亦不是负集，故

$$\sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},\ E\subset E_0\setminus E_1\}>0.$$

令$K_2=\min\{\sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},\ E\subset E_0\setminus E_1\},\ 1\}$，那么存在$E_2\in\mathbf{S}$，$E_2\subset E_0\setminus E_1$且$\nu(E_2)>\frac{K_2}{2}>0$。用数学归纳法，我们可以得到两两不相交的可测集序列$\{E_n\}$及正实数

序列$\{K_n\}$满足条件：$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E_0$，$\nu(E_n) > \frac{K_n}{2}$，$n=1,2,\cdots$，其中

$$K_n = \min\{\sup\{\nu(E):\ E\in \mathbf{S}, E\subset E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\}, 1\}. \tag{8.2}$$

因

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = 2\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} K_n = 0. \tag{8.3}$$

从(8.2)和(8.3)式便知道当n足够大时有

$$K_n = \sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},\ E\subset E_0\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\}. \tag{8.4}$$

令$F_0 = E_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，下面我们证明$F_0$是真正的负集。事实上

$$\nu(F_0) = \nu(E_0)\setminus\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

$$= \nu(E_0) - \sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n) < \nu(E_0) < 0.$$

设$F\subset F_0$，$F\in\mathbf{S}$，根据F_0的定义我们有

$$F\subset E_0\setminus\bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

对于任意自然数n成立。因而

$$\nu(F)\leqslant\sup\{\nu(E):\ E\in\mathbf{S},E\subset E_0\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}Ei\},\tag{8.5}$$

由(8.4)和(8.5)式便知，当n足够大时有

$$\nu(F)\leqslant K_n,$$

从而$\nu(F)\leqslant 0$，因此F_0确是真正的负集。这样我们便在 A 中找出一个真正的负集，这与假设矛盾，从而引理得证。

定理8.1 设ν是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，则存在正集A和负集B使得

$$X=A\cup B,\qquad A\cap B=\phi$$

成立。集A和B称为X（对于ν）的一个哈思分解。

证明 令

$$\beta=\inf\{\nu(B):\ B\text{是负集}\},$$

取负集序列$\{B_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty}\nu(B_n)=\beta$．令$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，由引理8.1知，$B$是负集，今往证$\nu(B)=\beta$．事实上，因$B$是负集，故根据$\beta$的定义有

$$\nu(B)\geqslant\beta,\tag{8.6}$$

另一方面，对于每一自然数n，我们有

$$\nu(B)=\nu(B_n)+\nu(B\setminus B_n)<\nu(B_n),$$

令$n\to\infty$得

$$\nu(B)\leqslant\beta,\tag{8.7}$$

综合(8.6)和(8.7)式便得$\nu(B)=\beta$。

现令$A=B'$，那么A不包含真正的负集。因为若A包含真

正的负集E，那么由引理8.1知$B\cup E$亦是负集且

$$\nu(B\cup E)=\nu(B)+\nu(E)<\nu(B)=\beta,$$

这与β的定义矛盾，由引理8.2知A是正集，这便证明了定理8.1.

注：从定理8.1的证明可见，E的哈恩分解并非唯一的。现给出一个具体例子，设$E=\{a,b,c\}$，$\mathbf{S}$为X的全体子集组成的集族，有限广义测度ν定义如下：

$$\nu(\{a\})=1,\ \nu(\{b\})=0,\ \nu(\{c\})=-2.$$

令$A_1=\{a,b\}$，$B_1=\{c\}$；$A_2=\{a\}$，$B_2=\{b,c\}$ 则A_1和B_1及A_2和B_2都是X的哈恩分解。

下面我们可以来讨论有限广义测度表为两个有限测度之差的问题。

设ν是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的有限测度，A和B是X(对于ν)的一个哈恩分解，那么对于每一$E\in\mathbf{S}$我们有

$$\begin{aligned}\nu(E)&=\nu(E\cap(A\cup B))=\nu(E\cap A)+\nu(E\cap B)\\&=\nu(E\cap A)-(-\nu(E\cap B)).\end{aligned}$$

令

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap A),\ \nu^-(E)=-\nu(E\cap B),$$

下面我们证明由上式确定的集函数ν^+和ν^-并不随X的哈恩分解的不同而改变。设

$$X=A_1\cup B_1;\ X=A_2\cup B_2$$

是X的两个哈恩分解，那么我们只须证明对于每一个可测集E有

$$\begin{aligned}&\nu(E\cap A_1)=\nu(E\cap A_2);\\&\nu(E\cap B_1)=\nu(E\cap B_2).\end{aligned}\tag{8.8}$$

事实上由关系式

$$E\cap(A_1\backslash A_2)\subset E\cap A_1$$

可知，$\nu(E\cap(A_1\backslash A_2))\geqslant 0$，又由关系式

$$E\cap(A_1\backslash A_2)\subset E\cap B_2$$

可知，$\nu(E\cap(A_1\backslash A_2))\leqslant 0$，因此$\nu(E\cap(A_1\backslash A_2))=0$。同理可证$\nu(E\cap(A_2\backslash A_1))=0$。注意关系式

$$E\cap A_1=[E\cap(A_1\backslash A_2)]\cup[E\cap(A_1\cap A_2)]$$

$$E\cap A_2=[E\cap(A_2\backslash A_1)]\cup[E\cap(A_1\cap A_2)]$$

我们有

$$\nu(E\cap A_1)=\nu(E\cap(A_1\cap A_2))=\nu(E\cap A_2),$$

这样便证明了(8.8)的第一式。同理证明(8.8)的第二式。这说明了ν^+和ν^-与特定的哈恩分解无关。ν^+和ν^-分别称ν的上变差、下变差。对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$|\nu|(E)=\nu^+(E)+\nu^-(E)$$

集函数$|\nu|$称ν的全变差。容易看出ν^+、ν^-和$|\nu|$都是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度且

$$\nu=\nu^+-\nu^-.$$

由上式可知，每一完全可加集函数可以表为两个测度之差。将ν表为它的上、下变差之差，这种表示方式称为ν的约当分解。

容易证明本节例1所述的有限广义测度ν，其上、下变差及全变差分别为

$$\nu^+(E)=\int_E f^+d\mu;$$

$$\nu^-(E)=\int_E f^- d\mu;$$

$$|\nu|(E)=\int_E |f| d\mu.$$

§2 拉东－尼古丁定理和勒贝格分解定理

设μ和ν分别是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度和有限广义测度，如果对于满足关系式$\mu(E)=0$的每一个可测集E，有$\nu(E)=0$，则称ν对于μ是绝对连续的，记为$\nu\ll\mu$。例如上节例1所述的有限广义测度ν，对该测度空间的测度μ是绝对连续的。

引理8.3 设μ和ν分别是$(X,\mathbf{S})$上的测度和有限广义测度，ν^+，ν^-，$|\nu|$分别是ν的上、下变差和全变差，则下述三命题等价。

i) $\nu\ll\mu$，

ii) $\nu^+\ll\mu$且$\nu^-\ll\mu$，

iii) $|\nu|\ll\mu$。

证明 i)$\Longrightarrow$ii) 设$\nu\ll\mu$，令$X=A\cup B$是X对于ν的一个哈恩分解，注意μ是测度，那么当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)=0$，我们有

$$0\leqslant\mu(E\cap A)\leqslant\mu(E)=0;$$

$$0\leqslant\mu(E\cap B)\leqslant\mu(E)=0.$$

因$\nu\ll\mu$故

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap A)=0$$

和

$$\nu^-(E)=\nu(E\cap B)=0,$$

于是$\nu^+\ll\mu$和$\nu^-\ll\mu$.

ii)$\Rightarrow$iii) 设$\nu^+\ll\mu$和$\nu^-\ll\mu$，那么当$E\in\mathbf{S}$且$\mu(E)=0$，我们

有

$$|\nu|(E)=\nu^+(E)+\nu^-(E)=0,$$

于是$|\nu|\ll\mu$。

iii)$\Rightarrow$i)由$|\nu(E)|\leqslant|\nu|(E)$立即推出。引理证完。

下面我们引进与绝对连续相对立的一种概念。设μ和ν分别是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度和有限广义测度，如果存在可测集N使$\mu(N)=0$且对所有$E\in\mathbf{S}$均有$\nu(E\cap N')=0$，那么我们称ν是μ奇异的，记为$\nu\perp\mu$。很显然奇异性乃是非绝对连续性的一种极端形式。如果ν是μ奇异的，那么只有使μ为0的集，ν在其上才有可能不为0。

例 3 设X为全体正整数所组成的集，$\mathbf{S}$为X中全体子集组成的集族，μ为勒贝格测度，ν定义如下，对每一$E\in\mathbf{S}$

$$\nu(E)=E\text{中点的个数}。$$

这时$\mu(\{1\})=0$，而$\nu(\{1\})=1$，故ν对μ不绝对连续。但$\nu\perp\mu$，事实上取$N=X$，显然$X\in\mathbf{S}$且$\mu(X)=0$而对每一$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\nu(E\cap N')=\nu(\phi)=0\ .$$

引理8.4 设μ和ν分别是可测空间$(X,\mathbf{S})$上的测度和有限广义测度，则ν对μ绝对连续且ν是μ奇异的充要条件是：对每一$E\in\mathbf{S}$，$\nu(E)=0$。

证明 充分性显然。往证必要性，因ν是μ奇异的，故有$N\in\mathbf{S}$，$\mu(N)=0$且对每一$E\in\mathbf{S}$，有$\nu(E\cap N')=0$。因对一切$E\in\mathbf{S}$，均有$\mu(E\cap N)=0$，并注意$\nu\ll\mu$，故对每一$E\in\mathbf{S}$，$\nu(E\cap N)=0$，从而

$$\nu(E)=\nu(E\cap N)+\nu(E\cap N')=0,$$

对每一$E\in\mathbf{S}$成立，这便证明了必要性。引理证完。

引理8.5 设$(X,\mathbf{S},\mu)$为测度空间，又ν_1和ν_2为$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，那么

i) 若$\nu_1 \ll \mu$和$\nu_2 \ll \mu$则$\nu_1 \pm \nu_2 \ll \mu$，

ii) 若$\nu_1 \perp \mu$和$\nu_2 \perp \mu$则$\nu_1 \pm \nu_2 \perp \mu$。

证明 i)是显然的。往证ii)因$\nu_1 \perp \mu$和$\nu_2 \perp \mu$，故有$N_i \in \mathbf{S}$，$\mu(N_i)=0$且对每一$E \in \mathbf{S}$有$\nu_i(E \cap N_i')=0$，$i=1,2$。令$N=N_1 \cup N_2$，那么

$$\mu(N) \leqslant \mu(N_1)+\mu(N_2)=0,$$

且对任意$E \in \mathbf{S}$都有

$$\begin{aligned}(\nu_1 \pm \nu_2)(E \cap N') &= \nu_1(E \cap N') \pm \nu_2(E \cap N') \\ &= \nu_1(E \cap N_1' \cap N_2') \pm \nu_2(E \cap N_1' \cap N_2') = 0,\end{aligned}$$

这便证明了$\nu_1 \pm \nu_2$是μ奇异的。引理证完。

引理8.6 设$(X,\mathbf{S},\mu)$是σ有限测度空间，又ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度，则存在非负可测实函数f及$(X,\mathbf{S})$上的有限测度ν_C和ν_S使得

$$\nu=\nu_C+\nu_S,$$

且$\nu_S \perp \mu$及对每一$E \in \mathbf{S}$有

$$\nu_C(E) = \int_E f d\mu.$$

证明 分两个步骤来证明。

i) 首先证明当μ和ν均是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度时，引理8.6成立，令

$$\mathbf{F}=\{f: f\text{为非负可测实函数且}\int_E f d\mu \leqslant \nu(E),\ \text{凡}E \in \mathbf{S}\},$$

因$0\in\mathbf{F}$，故$\mathbf{F}$是不空集。先往证$\mathbf{F}$具有性质：若$g_1,g_2,\cdots,g_n\in\mathbf{F}$，则$g=\max\limits_{1\leq k\leq n} g_k\in\mathbf{F}$。事实上由定理3.4知$g$是非负可测实函数。

令

$$\begin{aligned}
&E_1=\{x:\ g(x)=g_1(x)\},\\
&E_2=\{x:g(x)\neq g_1(x),\ g(x)=g_2(x)\},\\
&\cdots\cdots\\
&E_n=\{x:\ g(x)\neq g_k(x),\ k=1,2,\cdots,n-1,\\
&\qquad g(x)=g_n(x)\},
\end{aligned}$$

显然$E_1,E_2,\cdots,E_n$是两两不相交的可测集，且$X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$。

对每一$E\in\mathbf{S}$我们有

$$\int_E g d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{E\cap E_k} g d\mu\leqslant\sum_{k=1}^{n}\nu(E\cap E_k)=\nu(E),$$

这便证明了$g\in\mathbf{F}$。令

$$\alpha=\sup_{f\in\mathbf{F}}\int f d\mu$$

显然$\alpha\leqslant\nu(X)$，故α是实数。取$\mathbf{F}$中的函数列$\{g_n\}$使$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n d\mu$。令

$$f_n=\max_{1\leq k\leq n} g_k$$

显然$f_n\uparrow$，又由上面已证明的关于集$\mathbf{F}$的性质知$f_n\in\mathbf{F}$，再根据$\{f_n\}$的定义我们有$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu$。　　令

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{当}x\in X\text{且}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\text{为实数}\\ 0 & \text{当}x\in E\text{且}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\end{cases}$$

显然上式确定的函数f是非负可测实函数。由单调收敛定理，对于每一$E\in\mathbf{S}$，我们有

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu\leqslant \nu(E). \tag{8.9}$$

由(8.9)式及f的定义知，$f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ $a.e.$从而由(8.9)式得$f\in\mathbf{F}$且$\int fd\mu=\alpha$。定义E上的集函数ν_c如下：

$$\nu_c(E)=\int_E fd\mu,\ E\in\mathbf{S}\ .$$

那么根据定理4.13的推论知，ν_c是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度。对每一$E\in\mathbf{S}$，令

$$\nu_S(E)=\nu(E)-\nu_c(E)$$

易知由上式确定的集函数ν_s也是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度，往证$\nu_S\perp\mu$。

对于每一自然数n，用A_n和B_n分别表示X对有限广义测度$\nu_S-\frac{1}{n}\mu$的哈恩分解中的正、负集，因此对每一$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\nu_S(A_n\cap E)\geqslant\frac{1}{n}\mu(A_n\cap E),$$

$$\nu_S(B_n\cap E)\leqslant\frac{1}{n}\mu(B_n\cap E).$$

对每一自然数n，考虑函数$F=f+\frac{1}{n}\chi_{A_n}$。显然$F$是非负可测

函数且对每一$E\in\mathbf{S}$，

$$\int_E F d\mu = \int_E f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_n \cap E)$$

$$\leqslant \int_E f d\mu + \nu_s(A_n \cap E)$$

$$\leqslant \int_E f d\mu + \nu_s(E) = \nu(E),$$

所以$F\in\mathbf{F}$，从而$\int F d\mu \leqslant \alpha$。另一方面，我们有

$$\int F d\mu = \int f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_n) = \alpha + \frac{1}{n}\mu(A_n),$$

因此$\mu(A_n)=0$，$n=1,2,\cdots$，令$N=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，那么$N\in\mathbf{S}$，$\mu(N)=0$，且对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\nu_s(E\cap N') = \nu_s(E\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)) \leqslant \frac{1}{n}\mu(E\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)),$$

$$n=1,2,\cdots$$

令$n\to\infty$得

$$\nu_s(E\cap N')=0,$$

因此$\nu_s \perp \mu$。

ii）证明当μ是σ有限测度时，引理8.6成立。不妨设$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，其中$\{E_n\}$是两两不相交的可测集序列且$\mu(E_n)<+\infty$，$n=1,2,\cdots$。对每一自然数$n$，将$\mu$和$\nu$看作子空间$(E_n, E_n\cap\mathbf{S})$上的集函数，并用$\mu^{(n)}$和$\nu^{(n)}$表示之。那么容易看出$\mu^{(n)}$和$\nu^{(n)}$是可测空间$(E_n, E_n\cap\mathbf{S})$上的有限测度。

由已证明的 i)知，存在$(E_n,E_n\cap \mathbf{S})$上的非负可测实函数$f^{(n)}$及$(E_n,E_n\cap \mathbf{S})$上的有限测度$\nu_C^{(n)}$和$\nu_S^{(n)}$使

$$\nu^{(n)}=\nu_C^{(n)}+\nu_S^{(n)},$$

且$\nu_S^{(n)}\perp\mu^{(n)}$及对每一$E\in E_n\cap \mathbf{S}$有

$$\nu_C^{(n)}(E)=\int_E f^{(n)}d\mu^{(n)}.$$

定义$\mathbf{S}$上的集函数ν_c和ν_s如下：

$$\nu_c(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_C^{(n)}(E_n\cap E),\quad E\in\mathbf{S},$$

$$\nu_s(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_S^{(n)}(E_n\cap E),\quad E\in\mathbf{S},$$

又定义X上的函数f_n及f如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}f^{(n)}(x) & 当x\in E_n\\ 0 & 当x\bar{\in}E_n,\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),\qquad x\in X.$$

下面我们证明

1) f是$(X,\mathbf{S})$上的非负可测实函数，且对每一$E\in\mathbf{S}$均有

$$\nu_c(E)=\int_E f d\mu,$$

2) ν_c和ν_s是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度且

$\nu = \nu_c + \nu_s$；

3) $\nu_s \perp \mu$。

1)的证明：显然f是非负可测函数，又对每一$E \in \mathbf{S}$，由定理4.10推论3我们有

$$\nu_c(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_c^{(n)}(E_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n \cap E} f^{(n)} d\mu^{(n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n \cap E} f d\mu = \int_E f d\mu.$$

2)的证明：由1)及定理4.13的推论知，ν_c是有限测度，又对每一$E \in \mathbf{S}$，

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} [\nu_c^{(n)}(E_n \cap E)$$

$$+ \nu_s^{(n)}(E_n \cap E)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_c^{(n)}(E_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_s^{(n)}(E_n \cap E)$$

$$= \nu_c(E) + \nu_s(E),$$

故$\nu = \nu_c + \nu_s$。因ν和ν_c均是有限测度，故ν_s亦是有限测度。

3)的证明：因$\nu_s^{(n)} \perp \mu^{(n)}$，故存在$N_n \in E_n \cap \mathbf{S}$使$\mu(N_n) = 0$，且对每一$E \in \mathbf{S}$有

$$\nu_s^{(n)}((E_n \cap E) \cap (E_n \setminus N_n)) = 0.$$

令$N=\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$，则$N\in\mathbf{S}$且$\mu(N)=0$，又对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\nu_s(E\cap N')=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_s^{(n)}(E_n\cap E\cap N')$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_s^{(n)}((E_n\setminus N_n)\cap E_n\cap E\cap(\bigcap_{k\neq n}N_k'))=0$$

所以$\mu\perp\nu_s$。引理8.6证完。

定理8.2（勒贝格分解定理）设$(X,\mathbf{S},\mu)$是σ有限测度空空，又ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度，则存在$(X,\mathbf{S})$上的有限测度ν_c和ν_s使

$$\nu=\nu_c+\nu_s,$$

且$\nu_c\ll\mu$，$\nu_s\perp\mu$，ν的上述分解是唯一确定的。

证明 由引理8.6知，存在$(X,\mathbf{S})$上的有限测度ν_c和ν_s使

$$\nu=\nu_c+\nu_s,$$

且$\nu_c\ll\mu$，$\nu_s\perp\mu$。下面我们证明上述分解式是唯一的。设ν又可分解为$\nu=\overline{\nu_c}+\overline{\nu_s}$，其中$\overline{\nu_c}$和$\overline{\nu_s}$是$(X,\mathbf{S})$上的有限测度且$\overline{\nu_c}\ll\mu$，$\overline{\nu_s}\perp\mu$。那么从

$$\nu=\nu_c+\nu_s=\overline{\nu_c}+\overline{\nu_s}$$

得

$$\nu_c-\overline{\nu_c}=\overline{\nu_s}-\nu_s.$$

由引理8.5知，$\nu_c-\overline{\nu_c}$及$\overline{\nu_s}-\nu_s$既对μ绝对连续又是μ奇异的，再根据引理8.4我们有

$$\nu_c=\overline{\nu_c}\text{ 及 }\nu_s=\overline{\nu_s},$$

这就证明了定理8.2.

定理8.3 (拉东-尼古丁定理) 设 $(X,\mathbf{S},\mu)$为σ有限测度空间，ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度且$\nu\ll\mu$，则存在可测实函数f，使对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\nu(E)=\int_E f d\mu, \tag{8.10}$$

函数f在下述意义下是唯一确定的，如果同时有可测实函数g满足

$$\nu(E)=\int_E g\, d\mu,\quad \text{凡}E\in\mathbf{S}$$

则$f=g$，$a.e.$对μ.

证明 用ν^+和ν^-表示ν的若当分解，因$\nu\ll\mu$，由引理8.3我们有

$$\nu^+\ll\mu \text{ 和 } \nu^-\ll\mu.$$

对ν^+和ν^-分别应用引理8.6，由勒贝格分解的唯一性，那么存在$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可测实函数f_1和f_2使对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\nu^+(E)=\int_E f_1\, d\mu;$$

$$\nu^-(E)=\int_E f_2 d\mu.$$

令$f=f_1-f_2$则f是可测实函数且对每一$E\in\mathbf{S}$有

$$\nu(E)=\int_E f d\mu.$$

往证上述f的唯一性，如果同时有非负可测实函数g满足：对每一$E\in\mathbf{S}$

$$\nu_c(E)=\int_E g d\mu$$

那么由第四章习题第⑬题我们有$f=g$，a.e.（对μ）。定理8.3证完。

正象数学分析中

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx+c,\quad x\in R,$$

（其中a和c为常数）那样，把F称为f的不定积分，而f称为F对x的导数并记为$f=\frac{dF}{dx}$。我们把(8.9)式中的f称为ν对μ的广义导数或拉东-尼古丁导数，并记为$\frac{d\nu}{d\mu}$，换言之$f=\frac{d\nu}{d\mu}$。由此(8.10)式可表为

$$\nu(E)=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

推论 设μ和ν是$(X,\mathfrak{S})$上的测度且ν有限，又$\nu\ll\mu$则对任意广义实函数g均有

$$\int g\,d\nu=\int g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu,$$

上述等式之意义是：当等号之一边有意义时，另一边也有意义且相等。

证明 由定理8.3及定理4.15立即得出。

§3 拉东-尼古丁定理及勒贝格分解定理在一维实数空间的应用

本节将把上一节的内容应用于一维实数空间中。

设F是定义在实数空间R上的实值函数（点函数），若对

任给$\varepsilon>0$，恒存在$\delta>0$，使对R中任意的两两不相交开区间(a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$且$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$均有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$$

则称F为R上的绝对连续函数。

设F为R上的不降左连续实函数且$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)<+\infty$和$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，那么$F$称$R$上的分布函数。若$R$上的分布函数$F$满足$F(+\infty)=1$和$F(-\infty)=0$，则称$F$为概率分布函数。

在本节中符号μ恒表R中波雷耳集族$\mathbf{B}$上的勒贝格测度。

定理8.4 设ν是$(R,\mathbf{B})$上的有限测度，又设下式

$$F(x)=\nu((-\infty,x))\quad x\in R$$

所确定的函数F是R上的绝对连续函数，那末$\nu\ll\mu$。

证明 设ε为任给正数，又设δ为正数使得对R中两两不相交的开区间(a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$且$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$均有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon.$$

设$E\in\mathbf{B}$且E的勒贝格测度$\mu(E)=0$，由第二章知（引理2.2及引理2.4的证明）存在两两不相交的半开闭区间$\{[a_i,b_i)\}$使得

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\text{ 及 }\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta, \tag{8.11}$$

由(8.11)式推知对任意自然数n，恒有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon,$$

因而

$$\nu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\nu([a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{\infty}|F(b_i)-F(a_i)|\leq\varepsilon,$$

由于ε是任意的，故$\nu(E)=0$，这便证明了$\nu\ll\mu$。定理证完。

推论 若分布函数F是绝对连续函数，则由F引出的$L.S.$测度μ_F满足$\mu_F\ll\mu$，且存在非负可积函数f使

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}fd\mu$$

成立。

证明 由第二章习题第⑬题

$$\mu_F((-\infty,x))=F(x),\tag{8.12}$$

由定理8.4，$\mu_F\ll\mu$。再根据定理8.3存在可测实函数f使对每一$E\in S$

$$\mu_F(E)=\int_E fd\mu,$$

因μ_F是有限测度，故f是非负可积函数。令$E=(-\infty,x)$得

$$\mu_F((-\infty,x))=\int_{(-\infty,x)}fd\mu\equiv\int_{-\infty}^{x}fd\mu,\tag{8.13}$$

综合(8.12)和(8.13)式得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}fd\mu.$$

推论证完。

上述推论说明概率论中的一个事实：若分布函数是绝对连续函数，那么必具有密度函数。

设F是R上的分布函数，若存在R上的勒贝格可测函数f使

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f d\mu$$

则称F为连续型分布函数。若存在R上的点列$\{x_n\}$及定义在它上面实函数p，满足$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < +\infty$使

$$F(x) = \sum_{x_n < x} p(x_n)$$

则称F为离散型分布函数。如果分布函数F所引出的$L.S.$测度μ_F关于勒贝格测度μ是奇异的，则称F是奇异的。下面我们将证明任一分布函数可分解为上述三种类型分布函数之和，先证明一个引理。

引理8.7 任何分布函数F都可以唯一地分解为

$$F = F_c + F_d,$$

其中F_d为离散型分布函数，F_c是连续（不一定是连续型）的分布函数。

证明 因F不降故它的不连续点至多可数个，设为x_1，$x_2, \cdots, x_n \cdots$。令

$$p(x_n) = F(x_n + 0) - F(x_n),$$

$$F_d(x) = \sum_{x_n < x} p(x_n), \quad x \in R,$$

那么F_d为离散型分布函数。令

$$F_c = F - F_d$$

显然F_c是左连续函数。往证F_c是不降右连续函数。对任意$x<x'$，

$$F_c(x') - F_c(x) = F(x') - F(x) - \sum_{x<x_n<x'} p(x_n)$$

$$= F(x') - F(x+0) - \sum_{x<x_n<x'} p(x_n), \qquad (8.14)$$

由(8.14)式及$p(x_n)$的定义知F_c是不降的。在(8.14)式中令$x'\downarrow x$我们有

$$F_c(x+0) = F_c(x),$$

故F_c是右连续的，从而F_c是连续的分布函数。往证分解的唯一性，若F有两个分解式

$$F = F_c + F_d = F_c' + F_d', \qquad (8.15)$$

其中F_c和F_c'为连续的分布函数且$F_c(-\infty) = F_c'(-\infty) = 0$，而$F_d$和$F_d'$为离散分布函数。由(8.15)我们有

$$F_c - F_c' = F_d' - F_d \qquad (8.16)$$

(8.16)式左边为连续函数，右边为阶梯函数，只有他们恒等于常数时才可能相等，但因$F_c(-\infty) - F_c'(-\infty) = 0$，所以$F_c \equiv F_c'$，$F_d \equiv F_d'$。引理证完。

定理8.5 任何分布函数F都可以唯一地分解为

$$F = F_d + F_{ac} + F_s,$$

其中F_d为离散型分布函数，F_{ac}为连续型分布函数，F_s为连续奇异的分布函数。

证明 由引理8.7 F可唯一地分解为

$$F=F_d+F_c,$$

其中F_d为离散型分布函数，F_c为连续分布函数，用ν_c表F_c引出的$L.S.$测度，由定理8.2，ν_c对勒贝格测度μ可唯一地分解为

$$\nu_c=\nu_{ac}+\nu_s,$$

$\nu_{ac}\ll\mu$，$\nu_s\perp\mu$。再由定理8.3，存在勒贝格可测函数f，使对每一$E\in\mathbf{S}$，

$$\nu_{ac}(E)=\int_E fd\mu.$$

令

$$F_{ac}(x)=\nu_{ac}((-\infty,x)),\quad x\in R,$$
$$F_s(x)=\nu_s((-\infty,x)),\quad x\in R,$$

则F_{ac}，F_s都是分布函数且

$$F_{ac}(x)=\int_{-\infty}^{x}fd\mu$$

是连续型的，F_s是连续奇异的且

$$F_c=F_{ac}+F_s,$$

故

$$F=F_d+F_{ac}+F_s.$$

分解的唯一性由引理8.7和定理8.2中分解的唯一性得出。定理证完。

习 题

①设ν是$(X,\ \mathbf{S})$上的有限广义测度，$\{E_n\}$为可测集序

列，若$E_n\uparrow$或$E_n\downarrow$，则

$$\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)=\nu(\lim_{n\to\infty}E_n).$$

②设ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，证明对任意$E\in\mathbf{S}$，均有

$$\nu^+(E)=\sup\{\nu(F):F\subset E,\ F\in\mathbf{S}\},$$
$$\nu^-(E)=-\inf\{\nu(F):F\supset E,\ F\in\mathbf{S}\}.$$

③证明$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度ν能达到上、下确界。

④设ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，对每一$E\in\mathbf{S}$，直接定义

$$\nu^+(E)=\sup\{\nu(F):E\supset F\in\mathbf{S}\},$$
$$\nu^-(E)=-\inf\{\nu(F):E\subset F\in\mathbf{S}\}.$$

证明上面定义的ν^+和ν^-是有限测度且$\nu=\nu^+-\nu^-$。

⑤广义测度ν如果可以按照两种方式表为两个测度之差

$$\nu=\nu_1-\nu_2\text{和}\nu=\overline{\nu}_1-\overline{\nu}_2$$

是否一定有$\nu_1=\overline{\nu}_1$和$\nu_2=\overline{\nu}_2$？考察例子$(X,\mathbf{S})$，其中$\mathbf{S}=\{X,\phi\}$，$\nu(\phi)=0$，$\nu(X)=1$，$\nu_1(\phi)=\overline{\nu}_1(\phi)=\nu_2(\phi)=\overline{\nu}_2(\phi)=0$，$\nu_1(X)=2$，$\nu_2(X)=1$，$\overline{\nu}_1(X)=3$，$\overline{\nu}_2(X)=2$。

⑥设ν是$(X,\mathbf{S})$上的有限广义测度，$E\in\mathbf{S}$，证明$|\nu|(E)=0$的充要条件为E的任意可测子集F均有$\nu(F)=0$。

⑦设ν为有限广义测度，证明i) $\nu^+\perp\nu^-$及$\nu^-\perp\nu^+$。ii) $\nu^+\perp|\nu|$，$\nu^-\perp|\nu|$，$\nu\perp|\nu|$。

⑧设μ和ν分别为$(X,\mathbf{S})$上的测度和有限广义测度，$A\in\mathbf{S}$。证明若$\nu\ll\mu$($\nu\perp\mu$)，那么μ和ν看成$(A,A\cap\mathbf{S})$上的测度

和有限广义测度亦有$\nu \ll \mu(\nu \perp \mu)$。

⑨设μ和ν分别为$(X,\mathbf{S})$上的测度，有限广义测度。证明$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow$对于每个正数$\varepsilon>0$,存在正数$\delta>0$,使对任意$E \in \mathbf{S}$, $\mu(E)<\delta$, 均有$|\nu|(E) \leqslant \varepsilon$。

⑩拉东尼古丁定理中，μ为σ有限测度此条件不能省去。考虑例子：X为单点集$\{a\}$，$\mathbf{S}=\{X,\phi\}$,$\mu(X)=+\infty$, $\mu(\phi)=0$，$\nu(X)=1$，$\nu(\phi)=0$。

⑪证明$(X,\mathbf{S})$上全体有限广义测度组成一个巴拿赫空间，以$\|\nu\|=|\nu|(X)$为范数。

⑫设μ和ν为$(X,\mathbf{S})$上的两个有限测度且$\nu \ll \mu$，$\{f_n\}$为可测实函数列，f为可测实函数，对任给$\varepsilon>0$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\{x:|f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\})=0$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\nu(\{x:|f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon\})=0$。

⑬设μ和ν为$(X,\mathbf{S})$上的两个有限测度且$\nu \ll \mu$，记$g=\dfrac{d\nu}{d\mu}$，若$\mu(\{x:g(x)=0\})=0$,证明$\mu \ll \nu$且$\dfrac{d\mu}{d\nu}=g^{-1}$、$a.e.$(关于$\nu$)。

⑭设$(X,\mathbf{S})$为可测空间，μ为σ有限测度，ν，ν_1，ν_2都是有限广义测度且$\nu \ll \mu$，$\nu_1 \ll \mu$，$\nu_2 \ll \mu$，证明

i)若$\nu \geqslant 0$，则$\dfrac{d\nu}{d\mu} \geqslant 0$，$a.e.$(关于$\mu$)。

ii)对任意实数α和β，

$$\frac{d}{d\mu}(\alpha\nu_1+\beta\nu_2)=\alpha\frac{d\nu_1}{d\mu}+\beta\frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

⑮设μ为$(X,\mathbf{S})$上的σ有限测度,ν,φ为有限测度且$\varphi \ll \nu$,

$\nu \ll \mu$，则$\varphi \ll \mu$且

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu} \quad a.e.(\text{关于}\mu).$$

⑯设随机变数ξ的分布函数是连续型的，其密度函数为f，g是$(R,\mathbf{B})$上的可测函数，且$g(\xi)$的数学期望存在，证明

$$E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

⑰设随机变数ξ_1和ξ_2的联合分布函数F满足

$$F(\lambda, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \int_{-\infty}^{\lambda_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad \begin{array}{l} -\infty < \lambda_1 < +\infty \\ -\infty < \lambda_2 < +\infty, \end{array}$$

其中f为二维勒贝格可积函数。证明

i)由F产生的$L.S.$测度μ_F满足

$$\mu_F(B) = \iint_B f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2, \quad B \in \mathbf{B}^2.$$

ii)若$\xi_1 \xi_2$的$i+j$阶矩存在，则

$$\alpha_{ij} = \iint_{R^2} t_1^i \quad t_2^j f(t_1\, t_2) dt_1\, dt_2.$$

参 考 文 献

刘良深：积分与测度理论初步，中山大学内部教材。
王梓坤：随机过程论，科学出版社，1965。
Halmos. P.R.: Measure Theory, 1950.
Doob. J.L.: Stochastic processes 1953.
Loeve. M.: Probability Theory 1955.
Дынкин, Е. Б: Основания теории Марковских процессов, 1959.